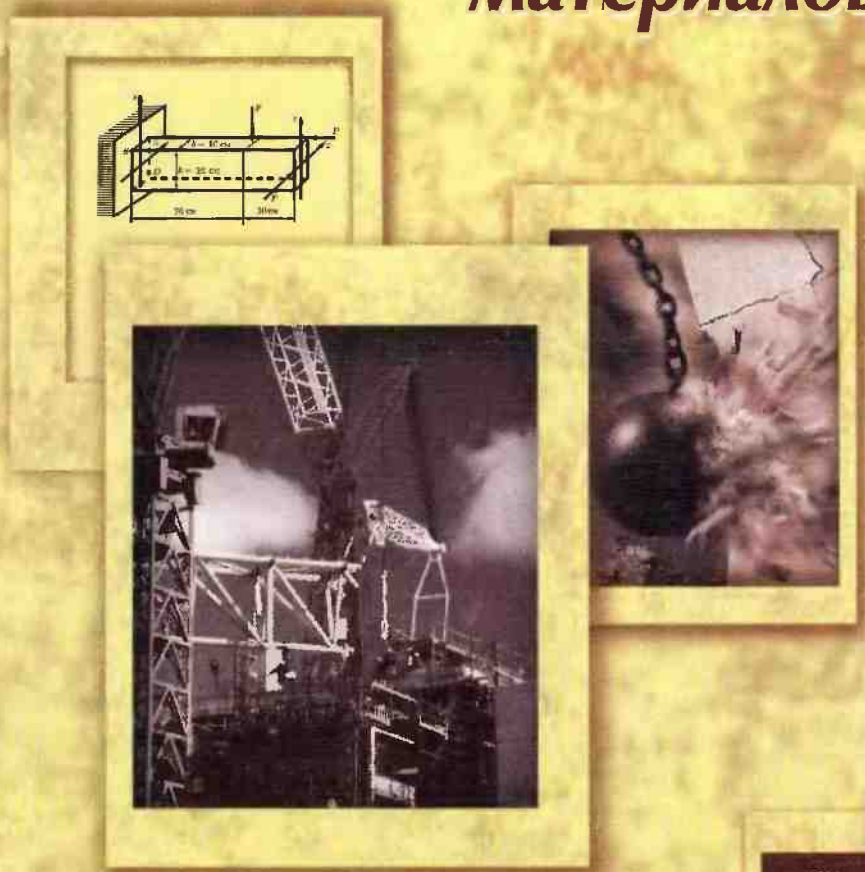
А 871575

Грес П.В.

Руководство к решению задач по сопротивлению материалов



ВЫСШАЯ ШКОЛА ИЗДАТЕЛЬСТВО

УДК 539.31.4
ББК 30.121
Г 79

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. *Г.И. Гребенюк* (зав. кафедрой «Строительная механика» Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета);

д-р техн. наук, проф. *А.С. Ракин* (кафедра «Сопротивление материалов и ПТМ» Новосибирской государственной академии водного транспорта)

Грес П.В.

Г 79 Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: Учеб. пособие для вузов / П.В. Грес. — М.: Высш. шк., 2004. — 135 с.: ил.

ISBN 5-06-004802-0

Учебное пособие содержит минимально необходимый теоретический материал, акцент сделан на рекомендациях к решению типовых задач курса «Сопротивление материалов». Предназначено для студентов различных специальностей и направлений высшего профессионального образования, соответствует Государственным образовательным стандартам второго поколения.

Задачи даны с решениями, что позволяет использовать сборник для самостоятельной работы.

Для студентов технических вузов.

УДК 539.31.4
ББК 30.121

ISBN 5-06-004802-0 © ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2004

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ВЕЛИЧИН и их наиболее употребляемые единицы

A — площадь поперечного сечения, м^2;
E — модуль продольной упругости, МПа;
F, P — сила (сосредоточенная), кН;
G — модуль сдвига, МПа;
J — момент инерции сечения, м^4:
J_z, J_y — осевые моменты инерции;
J_{zy} — центробежный момент инерции;
J_p — полярный момент инерции;
M — изгибающий момент, кН·м;
N — продольная сила, кН;
Q — поперечная сила, кН;
R — расчетное сопротивление, МПа; реактивная сила, кН;
S — статический момент сечения, м^3;
W — момент сопротивления сечения, м^3;
X — реакция в отброшенной связи, кН; кН·м;
b, d, h — ширина, диаметр, высота сечения, м;
i — радиус инерции сечения, м;
$k_д$ — динамический коэффициент;
l — длина стержня, балки, м;
m — сосредоточенный момент; пара сил, кН·м;
q — интенсивность распределенной силы, кН/м;
v — перемещение в направлении оси y, мм;
w — перемещение в направлении оси z, мм;
α — коэффициент температурного линейного расширения, 1/град;
β — коэффициент нарастания колебаний;
γ — удельный вес, кН/м^3;
Δ, δ — перемещение линейное, мм;
ε — деформация;
θ — угол поворота поперечного сечения, рад;
λ — гибкость стержня;
μ — коэффициент приведения длины стержня;
ν — коэффициент Пуассона;
σ — нормальное напряжение, МПа;
τ — касательное напряжение, МПа;
φ — коэффициент продольного изгиба;
ω — частота свободных колебаний, с$^{-1}$.

ЕДИНИЦЫ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН в Международной системе единиц (СИ)

Величина		Единица СИ		
Наименование	Обозначение	Наименование	Обозначение	Соотношения единиц
Сила	F, Q, N	ньютон	Н	10 Н = 1 кгс
Напряжение	σ, τ	паскаль	Па	1 Па = 1 Н/м^2
Модуль упругости	E, G	паскаль	Па	1 МПа = 10 кгс/см^2
Момент силы	M	ньютон-метр	Н·м	1 Н·м = 0,1 кгс·м
Погонная нагрузка	q	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 0,1 кгс/м

КРАТНЫЕ И ДОЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Приставка	Гига	Мега	Кило	Гекто	Дека	Деци	Санти	Милли	Микро	Нано
Обозначение	Г	М	к	г	да	д	с	м	мк	н
Множитель	10^9	10^6	10^3	10^2	10	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

☝ Перед подстановкой числовых значений необходимо все исходные величины привести к единым согласованным единицам измерения.

«Многие вещи нам непонятны не потому,
что наши понятия слабы;
но потому, что сии вещи не входят в круг
наших понятий».

Козьма Прутков.
«Мысли и афоризмы», № 66

Предлагаемое издание, надеемся, ответит на практический вопрос: какие шаги необходимо предпринять для решения той или иной конкретной задачи? Руководство, ввиду небольшого объема, не дает детального ознакомления со всеми типами задач и способами их решения. Его основная задача — дать точку опоры, т. е. рассмотреть наиболее типичные ситуации по основным разделам второй части сопротивления материалов. Здесь приводится минимум теории: более углубленный материал приводится в учебниках.

1 ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Понять, а не запомнить

При изучении какой-либо дисциплины студент, зачастую, стремится запомнить большой объем материала. Для сопротивления материалов гораздо важнее не знание на память, а понимание. Главнейшее в подготовке специалиста — развитие мышления, а оно не достигается запоминанием. Более того, попытка выучить, запомнить может вызвать лишь пассивное отношение к выполняемой работе.

Изучение сопротивления материалов состоит, в основном, в *решении задач*. Конечно, задача задаче — рознь. Однако и здесь есть полезный совет: рассматривая задачу, *задайте себе два замечательных вопроса*. Первый:

Что это такое?

Смысл в том, чтобы *спросить себя*, что означают понятия, о которых идет речь в задаче. И *ответить себе*.

Если же ответить сразу не удается, то ответ обязательно надо поискать, например, в теоретической части курса. Иначе для Вас задача может оказаться неразрешимой.

Второй вопрос:

Как это взаимосвязано?

Именно благодаря взаимосвязи понятий задачу удается решить. Чаще всего такие взаимосвязи представляют в виде формул, формулировок определений, а некоторые из них задаются формулировкой задачи.

Использовать эти вопросы надо всерьез, прилагая все усилия к поиску ответа. Тогда, как Вы скоро убедитесь, задачи будут решаться легче.

И, наконец, последняя общая, но важная мысль. Если глубокое изучение сопротивления материалов покажется Вам в каком-то смысле излишней роскошью, без которой вполне можно обойтись при овладении избранной Вами профессией, то поверьте: конечно — «можно». Но только одной, очень высокой ценой — неизбежным снижением уровня Вашей профессиональной квалификации и ограничением возможности ее роста. Это

факт, проверенный поколениями, а убедиться в этом на собственном опыте в полной мере Вы сможете лишь тогда, когда лично для Вас исправить что-либо существенное будет поздно.

О точности вычислений

Сопротивление материалов — это, пожалуй, для большинства студентов первая инженерная дисциплина в процессе обучения. Именно поэтому важно с самого начала заложить правильные представления о необходимой точности вычислений при выполнении расчетов. Тогда приобретенные в начале обучения навыки естественным образом перейдут и в последующую инженерную практику, где решения в общем виде целесообразны лишь в исключительных случаях, при исследовании влияния изменения каких-либо условий. Как правило, задачи необходимо решать в цифрах, т. е. по-инженерному.

Никакие измерения, как известно, не могут быть абсолютно точными. И несмотря на возросшие возможности современных технических средств (многоразрядные микрокалькуляторы и т. д.), нет никакого смысла вести расчеты с большим числом значащих цифр. Манипуляция с большими числами значительно усложняет расчеты и, как правило, приводит к появлению грубых ошибок. Нужно отдавать отчет, что по определению в инженерных дисциплинах:

- нет «точных» формул (они получены на основе предпосылок, гипотез);
- нагрузка определяется достаточно условно;
- размеры конструкции зависят от точности изготовления;
- материал имеет характеристики с определенным разбросом;
- нормативные величины (напряжения, перемещения и др.), т. е. с чем обычно сравниваются результаты расчетов, также получены с определенной степенью приближения.

Поэтому достаточно выполнять расчеты с точностью до десятых, сотых долей. При этом надо применять основные правила действий с приближенными числами. Следует избегать соблазна «учесть все»: так, например, сумма чисел 685,3 + 4,167 + 3,91 будет 693,4, а не 693,377.

Игнорирование правил действий с приближенными числами приводит к вереницам цифр и выглядит в инженерных расчетах совершенно абсурдно.

2 ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ—СЖАТИЕ

2.1 ЭПЮРЫ, НАПРЯЖЕНИЯ, ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Методические указания

При решении задач важно помнить следующее.

Продольная сила N в произвольном сечении стержня равна алгебраической сумме проекций *всех* внешних сил, взятых *по одну сторону от сечения*, на продольную ось.

☝ *Правило знаков:*
сила, направленная ОТ сечения, берется со знаком «+»;
сила, направленная НА сечение, берется со знаком «–».

☝ *Штриховка* на эпюре N всегда должна быть *перпендикулярна* продольной оси стержня, а значит, и оси эпюры.

☝ *Ординаты* эпюр, отложенные в выбранном масштабе, должны сопровождаться числовой характеристикой, а поле эпюры — знаком.

☝ *«Скачки»* на эпюре N должны быть равны значениям внешних сосредоточенных *сил*, приложенных в соответствующих сечениях.

Нормальные напряжения σ в произвольном поперечном сечении стержня определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N — продольная сила; A — площадь поперечного сечения.

Условие прочности при осевом растяжении—сжатии:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le R,$$

где R — расчетное сопротивление материала.

☝ При сжатии N и R подставляют в условие прочности *без учета знака*, т. е. по модулю.

Абсолютное удлинение Δl участка стержня длиной l определяется *по закону Гука*:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

где E — модуль продольной упругости.

☝ Отношение N/A (напряжение, а значит, и деформация $\varepsilon = \Delta l/l$) должно быть *постоянным* на данном участке.

Все задачи сопротивления материалов, в принципе, можно разбить на **три типа**:

прямая задача, или поверочный расчет (при известных нагрузках и размерах определяются напряжения и/или перемещения и сравниваются с допускаемыми, расчетными);

проектная задача, или подбор сечения (при заданных нагрузках и материалах определяются минимальные размеры поперечных сечений);

эксплуатационная задача, или определение грузоподъемности (при заданных размерах и материалах определяются максимально допускаемые нагрузки).

При деформации растяжения—сжатия условия прочности дают возможность решать задачи:

1) проверки прочности бруса, т. е. $\sigma_{max} < R$;

2) подбора поперечного сечения бруса, т. е. $A > \frac{N_{max}}{R}$;

3) определения грузоподъемности бруса, т. е. $N_{max} \le AR$.

Задача 1

Для стержня диаметром $D = 2$ см требуется определить допускаемую величину силы F при $R = 210$ МПа (рис. 1).

Эта задача — на определение грузоподъемности.

Эпюра N строится согласно приведенному выше правилу. Причем определять реакцию в

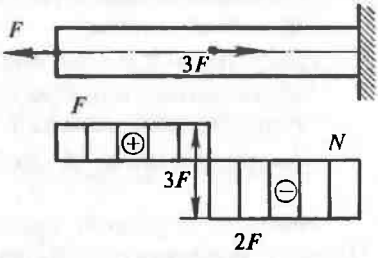


Рис. 1

заделке нет смысла, так как при вычислении в любом сечении продольной силы N берем внешние силы только слева от сечения (со стороны свободного конца). Таким образом, продольные силы в поперечных сечениях стержня на левом и правом участках будут соответственно равны:

$$N_{лев} = F \text{ (растяжение)};$$

$$N_{прав} = F - 3F = -2F \text{ (сжатие)}.$$

☞ *Обратите внимание:* скачки на эпюре продольных сил равны величине сосредоточенных сил в соответствующих сечениях.

Максимальное (по модулю) усилие $N_{max} = 2F$ (на правом участке).

Из условия прочности $\sigma_{max} = \dfrac{N_{max}}{A} \le R$ максимальное продольное усилие, которое можно допустить в поперечном сечении, равно:

$$N_{max} = RA = 210 \cdot 10^6 \cdot \frac{3{,}14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 66{,}0 \text{ кН}.$$

В опасном сечении действует усилие $2F$. Тогда допускаемая сила

$$F = \frac{N_{max}}{2} = \frac{66{,}0}{2} = 33{,}0 \text{ кН}.$$

Задача 2

Эта задача — прямая, т. е. в ней з а д а н ы (рис. 2):
внешние силы F (нагрузка);
площади поперечных сечений стального стержня по участкам и их длины.

Требуется о п р е д е л и т ь:
нормальные напряжения σ;
перемещения сечений
(с построением эпюр N, σ, Δ).

Эпюра N строится согласно приведенному выше правилу. Причем определять реакцию в заделке нет смысла, так как при вычислении в любом сечении продольной силы N берем внешние силы только справа от сечения (со стороны свобод-

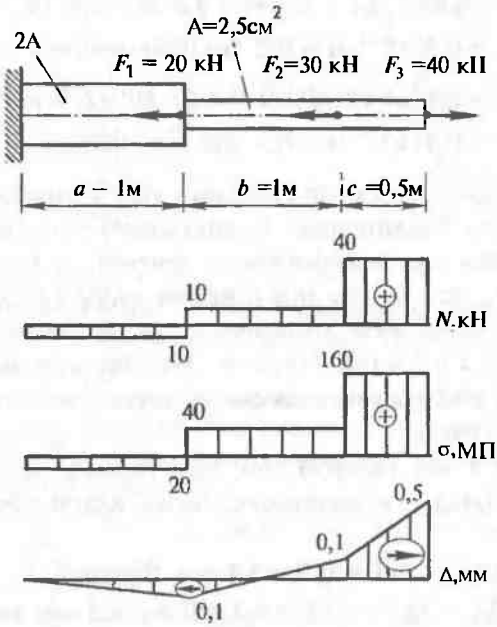


Рис. 2

ного конца). Таким образом, продольные силы в поперечных сечениях стержня на участках «*c*», «*b*» и «*a*» будут равны соответственно:

$$N_c = F_3 = 40 \text{ кН (растяжение)};$$

$$N_b = F_3 - F_2 = 40 - 30 = 10 \text{ кН (растяжение)};$$

$$N_a = F_3 - F_2 - F_1 = 40 - 30 - 20 = -10 \text{ кН (сжатие)}.$$

Нормальные напряжения σ на участках «*a*», «*b*» и «*c*» равны соответственно:

$$\sigma_a = N_a / A_a = (-10000)/(5 \cdot 10^{-4}) = -20 \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа (сжатие)};$$

$$\sigma_b = N_b / A_b = 10000/(2{,}5 \cdot 10^{-4}) = 40 \text{ МПа (растяжение)};$$

$$\sigma_c = N_c / A_c = 40000/(2{,}5 \cdot 10^{-4}) = 160 \text{ МПа (растяжение)}.$$

Удлинения по участкам:

$$\Delta l_a = N_a a/(E_a A_a) = (-10000) \cdot 1/(2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}) =$$
$$= -0{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0{,}1 \text{ мм (укорочение)};$$

$$\Delta l_b = N_b b/(E_b A_b) = 10000 \cdot 1/(2 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}2 \text{ мм (удлинение)};$$
$$\Delta l_c = N_c c/(E_c A_c) = 40000 \cdot 0{,}5/(2 \cdot 10^{11} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}4 \text{ мм (удлинение)}.$$

Перемещения Δ точек приложения сил F можно вычислить как суммарное удлинение (укорочение) соответствующего участка, *считая от неподвижного сечения*, т. е. от заделки. Важно понять, что *точка* приложения силы (и соответствующее сечение) *не может удлиняться или укорачиваться, а может только перемещаться* вправо или влево. Таким образом, для построения эпюры Δ вычисляем перемещения необходимых точек:

$\Delta_1 = \Delta l_a = 0{,}1$ мм (влево!), так как участок «*a*» укоротился, а его левая точка — неподвижна; далее ведем алгебраическое суммирование:

$\Delta_2 = \Delta l_a + \Delta l_b = -0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}1$ мм (вправо);

$\Delta_3 = \Delta l_a + \Delta l_b + \Delta l_c = -0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}5$ мм (вправо).

Очевидно, что полное удлинение всего стержня также равно 0,5 мм.

Естественно, при отсутствии заранее заданного соотношения площадей получаемое решение было бы рациональнее с точки зрения минимального объема стержня, так как отсутствовал бы излишний запас по условию прочности.

При проектировании конструкций необходимо стремиться к тому, чтобы недогрузка (или перегрузка) не превышала 5 %.

Задача 3

Подобрать поперечные сечения стержневой системы (рис. 3), нагруженной силой $F = 100$ кН (левый стержень медный с расчетным сопротивлением $R_м = 100$ МПа, правый — стальной, $R_{ст} = 210$ МПа).

Определить перемещение узла C (модуль упругости меди $E_м = 1 \cdot 10^5$ МПа, стали — $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа).

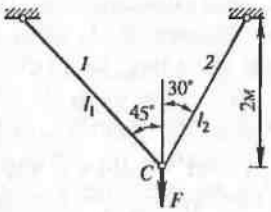


Рис. 3

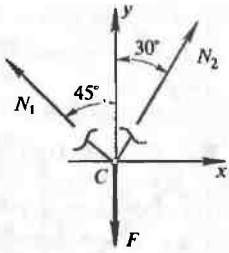


Рис. 4

Первая часть задачи — проектная, затем, после подбора сечения по условию прочности, решается прямая задача — определяется перемещение.

1. Рассмотрим условие равновесия узла C (рис. 4) под действием заданной нагрузки F и искомых усилий в стержнях N_1 и N_2. Для данной системы сходящихся сил можно составить два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0; \quad -N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 30^\circ - F = 0.$$

Из первого уравнения получаем $N_2 = \sqrt{2} N_1$; подставив во второе, получим $N_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{(1+\sqrt{3})} F = 0{,}518F = 51{,}8$ кН, тогда $N_2 = 0{,}732F = 73{,}2$ кН.

Оба стержня растянуты.

Из условия прочности $\sigma_{max} = \dfrac{N_{max}}{A} \le R$ находим требуемые площади:

$$A_1 \ge \frac{N_1}{R_1} = \frac{51800}{100 \cdot 10^6} = 5{,}18 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 5{,}18 \text{ см}^2;$$

$$A_2 \ge \frac{N_2}{R_2} = \frac{73200}{210 \cdot 10^6} = 3{,}49 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3{,}49 \text{ см}^2.$$

2. Вычисляем абсолютные удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{51800 \cdot 2{,}82}{1 \cdot 10^{11} \cdot 5{,}18 \cdot 10^{-4}} = 2{,}82 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2{,}82 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{73200 \cdot 2{,}31}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-4}} = 2{,}42 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2{,}42 \text{ мм}.$$

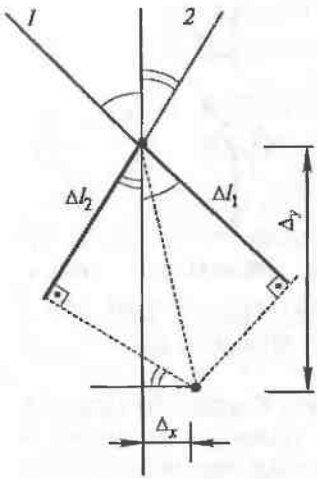


Рис. 5

Для нахождения положения шарнира после деформирования (рис. 5) следовало бы провести из верхних точек стержней дуговые засечки радиусами $l_1 + \Delta l_1$ (из левой) и $l_2 + \Delta l_2$ (из правой), но в силу малости деформаций можно отложить на продолжении каждого стержня величину его удлинения и вместо дуговой засечки провести из полученных точек перпендикуляры к направлению каждого стержня. Пересечение перпендикуляров определяет новое положение узла после нагружения системы и деформации стержней.

Полученное геометрическое построение называют *диаграммой перемещений.*

Полное перемещение узла может быть найдено как геометрическая сумма его составляющих: $\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$. Из диаграммы следует, что Δl_1 равно алгебраической сумме проекций горизонтального Δ_x и вертикального Δ_y перемещений шарнира на направление 1-го стержня, а Δl_2 равно сумме проекций Δ_x и Δ_y на направление 2-го стержня, т. е.

$$\Delta l_1 = \Delta_y \cos 45^\circ + \Delta_x \sin 45^\circ;$$

$$\Delta l_2 = \Delta_y \cos 30^\circ - \Delta_x \sin 30^\circ,$$

$$\text{или } \Delta_y \frac{\sqrt{2}}{2} + \Delta_x \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}82; \ \Delta_y \frac{\sqrt{3}}{2} - \Delta_x \frac{1}{2} = 2{,}42,$$

откуда $\Delta_x = 1{,}18$ мм; $\Delta_y = 2{,}81$ мм.

Полное перемещение $\Delta = \sqrt{1{,}18^2 + 2{,}81^2} = 3{,}05$ мм.

2.2 УЧЕТ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Продольная сила изменяется по длине бруса по линейному закону. Для построения эпюры N вычисляют продольную силу в двух сечениях — в начале и в конце участка.

Нормальное напряжение σ также изменяется по длине стержня по линейному закону: наибольшее значение достигается в месте закрепления стержня.

Учет собственного веса сводится к суммированию напряжений от воздействий внешних сосредоточенных сил и собственного веса. Напряжения от собственного веса стержня постоянного сечения зависят только от материала и длины стержня и не зависят от площади поперечного сечения. При определении деформаций растянутых или сжатых стержней от действия собственного веса следует учитывать, что деформации, как и напряжения, переменны по длине.

Полное удлинение стержня длиной l от внешней силы P и собственного веса (учитывая, что собственный вес стержня равен $G = \gamma l A$) определяют по формуле

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} + \frac{Gl}{2EA}.$$

Таким образом, удлинение от собственного веса в 2 раза меньше удлинения от такой же внешней силы, приложенной к концу стержня.

Очевидно, что полное удлинение можно определить отдельно от внешних сил и отдельно от собственного веса, а затем просуммировать результаты.

Задача 4

Колонна из бетона ($\gamma = 25$ кН/м^3, $E = 27$ ГПа) выполнена в виде ступенчатого стержня (см. рис. 6).

Требуется:

- проверить прочность колонны, загруженной силами F_1, F_2 и собственным весом;
- спроектировать колонну минимального веса, определив рациональное значение площадей поперечного сечения на каждом участке (A_1, A_2, A_3);
- определить перемещение сечения I–I.

Решение. Вычислим собственный вес каждой составляющей части колонны ($G = \gamma A l$):

$G_1 = 25000 \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}5 = 18{,}5 \cdot 10^3$ Н $= 18{,}5$ кН;

$G_3 = 25000 \cdot 3{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 7{,}5 = 7{,}1$ кН;

$G_2 = 25000 \cdot 6{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 7 = 11{,}2$ кН.

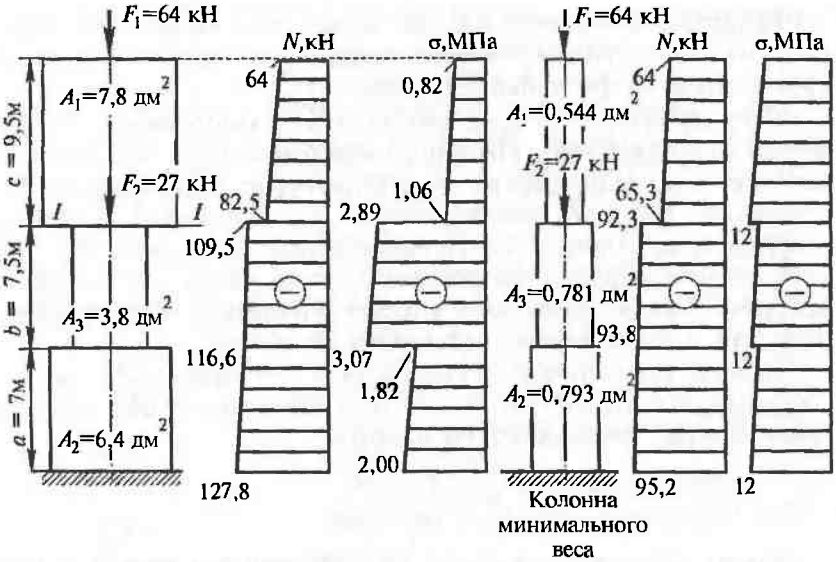


Рис. 6

С учетом полученных значений строим эпюру продольных сил (скачки — только в сечениях приложения сосредоточенных сил).

Проверить прочность колонны можно после построения эпюры напряжений: очевидно, что максимальные сжимающие напряжения σ_{max} действуют в нижнем сечении среднего участка:

$$\sigma_{max} = N/A = 116600/(3{,}8\cdot 10^{-2}) = 3{,}07\cdot 10^6 \text{ Па} =$$
$$= 3{,}07 \text{ МПа} < R = 12 \text{ МПа}.$$

Размеры колонны *минимального веса* можно определить из условия прочности $\sigma_{max} = R$, причем очевидно, что опасными будут нижние сечения каждого участка. Так, начиная сверху колонны, получаем

$$|N_{1\,max}|/A_1 = (F_1 + \gamma A_1 c)/A_1 \geq R,$$

откуда $A_1 > F_1/(R - \gamma c) = 64000/(12\cdot 10^6 - 25000\cdot 9{,}5) = 5{,}44\cdot 10^{-3}$ м^2 = = 0,544 дм^2. При этом *новый* вес верхней части:

$$G_1 = 25000\cdot 0{,}544\cdot 10^{-2}\cdot 9{,}5 = 1{,}3 \text{ кН}.$$

Аналогично:

$$A_3 = (F_1 + F_2 + G_1)/(R - \gamma b) = 0{,}781 \text{ дм}^2; \quad G_3 = 1{,}5 \text{ кН};$$

затем $A_2 = (F_1 + F_2 + G_1 + G_3)/(R - \gamma a) = 0{,}793$ дм^2; $G_2 = 1{,}4$ кН;

$$\Delta_{1-1} = \Delta l_a + \Delta l_b,$$

где укорочения $\Delta l_a = (F_1 + F_2 + G_1 + G_3 + G_2/2)a/(EA_2)$;

$$\Delta l_b = (F_1 + F_2 + G_1 + G_3/2)b/(EA_3),$$

тогда $\Delta_{1-1} = 3{,}09 + 3{,}31 = 6{,}40$ мм (вниз).

Задача 5

Для стального стержня, нагруженного силой P, построить эпюру продольных сил N и найти перемещение сечения *1–1* с учетом собственного веса всех участков стержня (рис. 7).

Исходные данные: $a = 3$ м; $b = 2$ м; $c = 1{,}5$ м; $A = 10$ см^2; $P = 1$ кН; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Удельный вес стали $\gamma = 78$ кН/м^3 = $= 7{,}8 \cdot 10^4$ Н/м^3.

Решение. Найдем собственный вес участков стержня c, b, a:

$$G_c = \gamma Ac = 7{,}8 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}5 = 117 \text{ Н} = 0{,}117 \text{ кН};$$

$$G_b = \gamma 2Ab = 7{,}8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 312 \text{ Н} = 0{,}312 \text{ кН};$$

$$G_a = \gamma 2Aa = 7{,}8 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 3 = 468 \text{ Н} = 0{,}468 \text{ кН}.$$

Эпюру продольных сил строим по характерным сечениям: эпюрой N будет ломаная, состоящая из нескольких прямых со скачком (разрывом непрерывности) в 1 кН в сечении, где приложена сила P.

Для определения перемещения сечения *1–1* мысленно отбросим часть стержня, лежащую ниже сечения *1–1*, и ее действие на оставшуюся верхнюю часть заменим весом участка

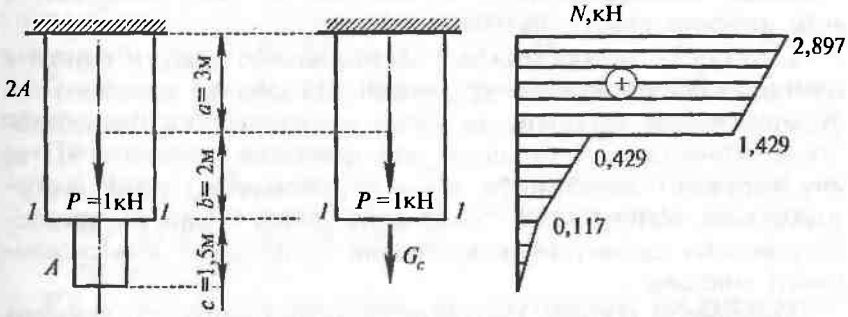


Рис. 7

СПГГИ (ТУ)
ГЛАВНАЯ
БИБЛИОТЕКА

$c - G_c$. Тогда искомое перемещение сечения *1–1* будет равно удлинению двух верхних участков b и a, которое можно представить как сумму трех слагаемых:

$\frac{G_c(a+b)}{E2A}$ — удлинение участка $(a + b)$ от веса G_c;

$\frac{Pa}{E2A}$ — удлинение участка a от силы P;

$\frac{\gamma(a+b)^2}{2E}$ — удлинение участка $(a + b)$ от собственного веса.

$$\Delta_{1-1} = \Delta l_{a+b} = \frac{G_c(a+b)}{E2A} + \frac{Pa}{E2A} + \frac{\gamma(a+b)^2}{2E} =$$

$$= \frac{117(3+2)}{2\cdot10^{11}\cdot2\cdot10\cdot10^{-4}} + \frac{1\cdot10^3\cdot3}{2\cdot10^{11}\cdot2\cdot10\cdot10^{-4}} + \frac{78\cdot10^3(3+2)^2}{2\cdot2\cdot10^{11}} =$$

$$= (1{,}46 + 7{,}50 + 4{,}88)\cdot10^{-6}\ \text{м} = 13{,}84\cdot10^{-3}\ \text{мм}\ \ (\text{вниз}).$$

2.3 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Особенность задач

Реакции (а значит, и внутренние усилия и напряжения) *нельзя определить* с использованием только уравнений статики (уравнений равновесия). Это объясняется наличием «лишних» связей. Каково число этих связей — такова и степень статической неопределимости. Следует подчеркнуть, что степень статической неопределимости *не зависит* от вида нагрузки, а есть *свойство* самой системы.

Статически неопределимые задачи можно решить только с помощью *дополнительных* уравнений. Их обычно называют *деформационными* уравнениями (реже — уравнениями совместности деформаций). В сущности это *уравнения перемещений*, так как выражают зависимость между *перемещениями* точек *деформированной* конструкции. *Число* этих дополнительных уравнений должно соответствовать *степени* статической неопределимости системы.

Установить степень статической неопределимости системы можно двумя путями:

• формальным — как разность между количеством искомых усилий и числом независимых уравнений статики;

• практическим — последовательным отбрасыванием «лишних» связей до образования *статически определимой* системы, которая называется основной системой. Здесь важно «не перестараться», ибо основная система должна быть *кинематически неизменяемой* (если все оставшиеся элементы считать абсолютно твердыми, то система не должна превратиться в механизм).

Итак, *общий порядок* решения статически неопределимых задач может быть такой:

1) устанавливаем степень статической неопределимости;

2) изображаем исходную и деформированную системы;

3) составляем деформационные уравнения (их столько, какова степень статической неопределимости) и, если необходимо, уравнения равновесия.

В результате решения этих уравнений *определяются усилия в «лишних» связях*, а это значит, что **статическая неопределимость будет раскрыта**. Далее задача решается обычным образом (она как бы стала статически определимой).

Следует подчеркнуть, что составление деформационных уравнений, в отличие от уравнений равновесия, требует учета особенностей, «специфики» данной системы — в этом обычно и заключаются трудности при решении задач этого типа.

Задача 6

Для стержня (рис. 8) задано:

$A_1 / A_2 = 2$;

сталь: $E_{ст} = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа; $R_{ст} = 210$ МПа;

алюминий: $E_{ал} = 7 \cdot 10^4$ МПа; $R_{ал} = 150$ МПа.

Определить по условиям прочности площади A_1 и A_2 поперечных сечений.

Построить эпюры:

• продольных сил N;

• нормальных напряжений σ;

• перемещений Δ.

Решение. Задача один раз статически неопределима, так как здесь две неизвестных реакции (R_1 и R_2), а уравнение

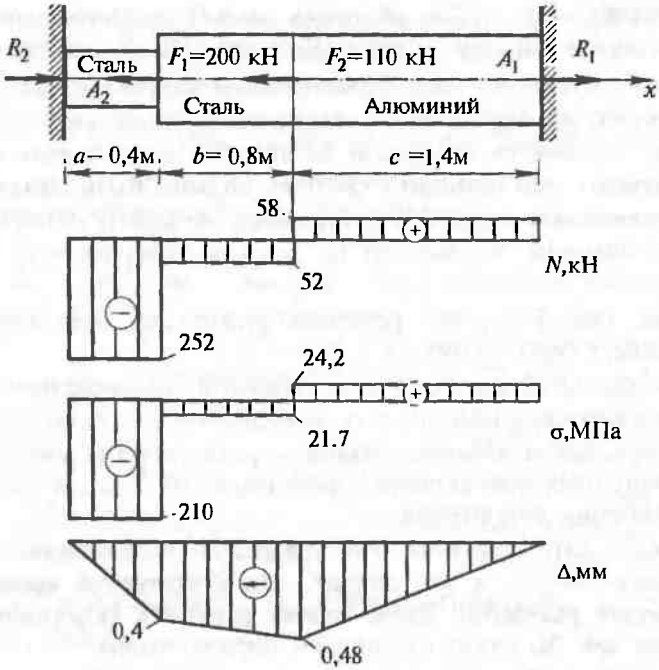


Рис. 8

статики — одно ($\Sigma F_x = 0$). Без дополнительного, так называемого *деформационного,* уравнения задачу не решить.

Очевидно, длина всего данного стержня не изменяется, т. е. для всего стержня $\Delta l = 0$. При этом $\Delta l = \Delta l_a + \Delta l_b + \Delta l_c$, а каждое слагаемое, в свою очередь, может быть определено по формуле $\Delta l = Nl/(EA)$. Если выразить продольную силу на каждом участке только через одну реакцию (если смотреть, например, справа от сечения, то через R_1), то, обойдясь без уравнения статики, будем иметь одно уравнение с одним неизвестным. Это и будет деформационное уравнение: оно выражает *геометрическую* сторону задачи и позволяет *раскрыть статическую неопределимость,* т. е. найти одну из реакций, а значит, избавиться от статической неопределимости.

Важно правильно определить *продольные силы* на каждом участке: здесь

$$N_c = R_1;\ N_b = R_1 - F_2 = R_1 - 110;$$
$$N_a = R_1 - F_2 - F_1 = R_1 - 110 - 200 = R_1 - 310.$$

Тогда *деформационное уравнение* будет иметь следующий вид:

$$\frac{(R_1 - 310)\cdot 0{,}4}{E_{ст} A_2} + \frac{(R_1 - 110)\cdot 0{,}8}{E_{ст} A_1} + \frac{R_1 \cdot 1{,}4}{E_{ал} A_1} = 0.$$

☞ *Обратите внимание*: это уравнение можно решить только задав *соотношения* так называемых жесткостных характеристик, а именно, модулей упругости материалов и площадей поперечных сечений. У нас $A_1 = 2A_2$; $E_{ст} = 3E_{ал}$. Подставив эти соотношения в деформационное уравнение и решив его, будем иметь $R_1 = 58$ кН. Таким образом, статическая неопределимость раскрыта, и дальше, формально, на правую реакцию можно смотреть как на обычную внешнюю силу (см., например, первую задачу).

Заметим также, что при других соотношениях жесткостных характеристик результат, естественно, был бы другим — это **важнейшее свойство** статически неопределимых систем.

Далее, как и в задачах *1* и *2*, двигаясь справа, строим эпюру *N*. Скачок же на левом конце, равный 252 кН, показывает значение второй реакции, т. е. $R_2 = 252$ кН.

Данная задача — обратная, проектная: нужно определить площади (A_1 и A_2) поперечных сечений стержней по условию прочности ($\sigma = N/A < R$) при заданных конструктивных требованиях (правая часть стержня должна иметь площадь поперечного сечения в 2 раза бо́льшую, чем левая). Вначале для каждого участка определим минимально необходимые (по условию прочности) площади поперечных сечений:

$$A_2 > N_a/R_{ст} = 252\,000/(210\cdot 10^6) = 12\cdot 10^{-4}\ м^2 = 12\ см^2;$$

$$A_1 > N_b/R_{ст} = 52\,000/(210\cdot 10^6) = 2{,}48\cdot 10^{-4}\ м^2 = 2{,}48\ см^2;$$

$$A_1 > N_c/R_{ал} = 58\,000/(150\cdot 10^6) = 3{,}87\cdot 10^{-4}\ м^2 = 3{,}87\ см^2.$$

Окончательно, с учетом конструктивных требований ($A_1 = 2A_2$), принимаем

$$A_2 = 12\ см^2;\ A_1 = 24\ см^2.$$

Для каждого участка, с учетом найденных площадей, по формуле $\sigma = N/A$ вычисляем значения нормальных напряжений и строим эпюру σ. Заметим, что хотя бы на одном участ-

ке максимальное напряжение должно быть близким или равняться расчетному сопротивлению материала.

Для построения эпюры Δ достаточно определить изменение длин участков *a* и *c*:

$$\Delta l_a = N_a l_a/(E_{ст} A_2) = -252000 \cdot 0{,}4/(2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}) = -0{,}4 \text{ мм}$$

(укорочение);

$$\Delta l_c = N_c l_c/(E_{ал} A_1) = 58000 \cdot 1{,}4/(7 \cdot 10^{10} \cdot 24 \cdot 10^{-4}) = 0{,}48 \text{ мм}$$

(удлинение).

Очевидно, что сечения, где приложены силы F_1 и F_2, с учетом заданных закреплений будут смещаться влево, что и отмечаем на эпюре Δ стрелкой.

Задача 6а

Требуется определить температурные напряжения при $\Delta t = 10°$ (рис. 9).

Решение. Деформационное уравнение имеет тот же смысл ($\Delta l = 0$), но его составляющие (по участкам) вычисляются здесь по-другому, как с учетом формулы $\Delta l_t = \alpha l \Delta t$, так и $\Delta l = Nl/(EA)$, а именно

$$(\alpha_{ст}(a+b)+\alpha_{ст}c)\Delta t - R_t\left(\frac{a}{E_{ст}A_2}+\frac{b}{E_{ст}A_1}+\frac{c}{E_{ал}A_1}\right)=0,$$

откуда $R_t = 40{,}5$ кН.

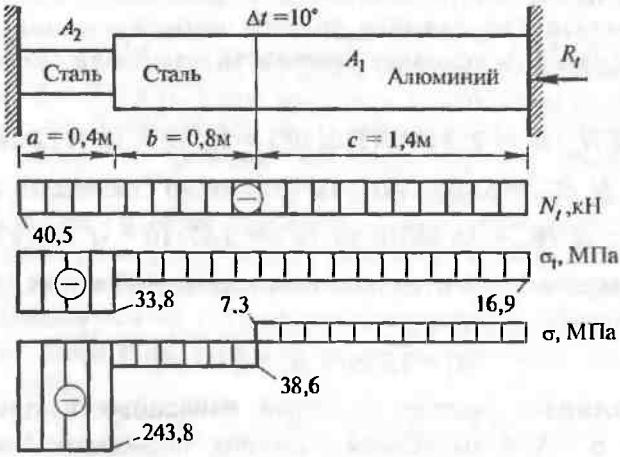


Рис. 9

Как обычно, определяем напряжения (температурные, см. эпюру σ_t) и строим (алгебраическим суммированием) эпюру σ от совместного воздействия (см. задачу 5).

Задача 7

Определить напряжения в стержнях, поддерживающих абсолютно жесткую, невесомую плиту, нагруженную силой $P = 54$ кН (рис. 10).

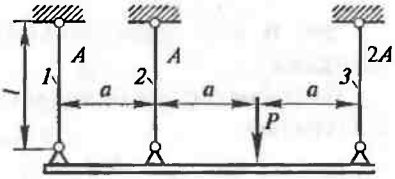


Рис. 10

Стержни параллельны между собой и выполнены из одного материала, т. е. $E = \text{const}$. Принять площадь поперечного сечения $A = 1$ см^2.

Решение. Условий статического равновесия два (рис. 11):

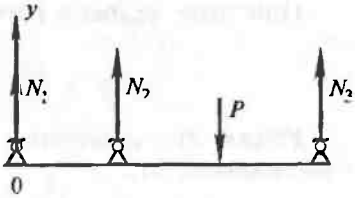


Рис. 11

$$\sum Y = 0;\ N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \text{ и}$$

$$\sum M_0 = 0;\ N_2 a + N_3 3a - P2a = 0,$$

откуда $N_1 + N_2 + N_3 = P$ и

$$N_2 + 3N_3 = 2P.$$

Система один раз статически неопределима.

Составим условие перемещений (деформационное уравнение).

Будем считать, что третий стержень удлиняется больше, чем первый. Это допущение не влияет на условие перемещений. Обозначим удлинения этих стержней соответственно Δl_3 и Δl_1.

После деформации стержней плита, как абсолютно жесткая, остается плоской. Следовательно, второй стержень удлинится настолько (Δl_2), что нижний его шарнир останется прикрепленным к плите (рис. 12).

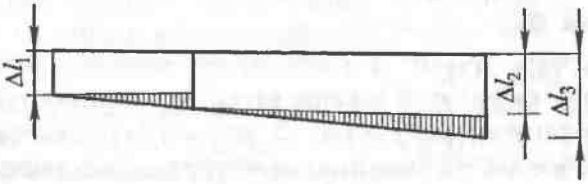


Рис. 12

Из подобия заштрихованных треугольников найдем

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{\Delta l_3 - \Delta l_2} = \frac{1}{2},$$

или

$$2\Delta l_1 - 3\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Это и есть деформационное уравнение или условие перемещений.

Выразим предварительно удлинения стержней через усилия в стержнях:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} \text{ и } \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{E(2A)}.$$

При этом условие перемещений примет вид:

$$2N_1 - 3N_2 + \frac{N_3}{2} = 0.$$

Решая это уравнение совместно с уравнениями равновесия, найдем, что

$$N_1 = \frac{5}{27}P, \; N_2 = \frac{6}{27}P \text{ и } N_3 = \frac{16}{27}P,$$

или при $P = 54$ кН $N_1 = 10$ кН, $N_2 = 12$ кН, $N_3 = 32$ кН.

Напряжения (везде растягивающие) в поперечных сечениях этих стержней:

$$\sigma_1 = \frac{10000}{1 \cdot 10^{-4}} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{12000}{1 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{32000}{2 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа}.$$

Задача 8

Дано (рис. 13):

$R_{ст} = 200$ МПа; $E_{ст} = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа; $R_{ал} = 150$ МПа; $E_{ал} = 0{,}7 \cdot 10^5$ МПа; $a = 1$ м; $A_{ст}/A_{ал} = 0{,}5$; $A_{ст} = 4$ см^2.

Определить максимальную грузоподъемность P из условия прочности стержней.

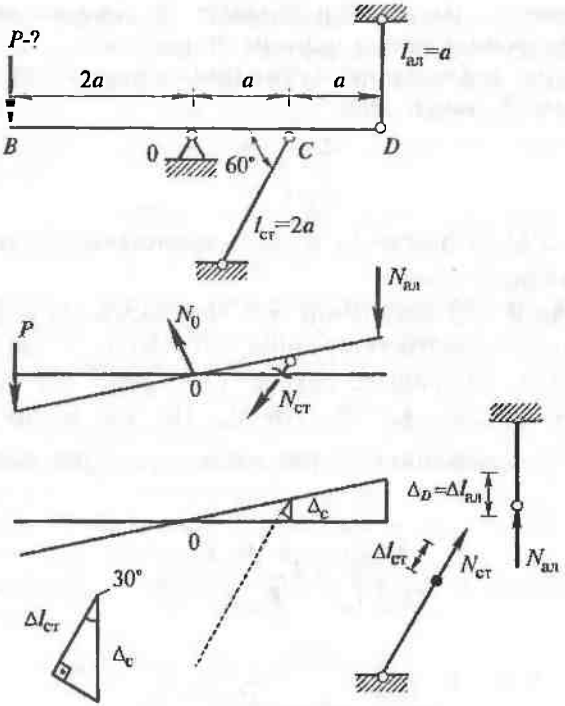


Рис. 13

Неизвестных реакций — 4. Уравнений статики — 3.

Таким образом, задача один раз статически неопределима, т. е. требуется *одно дополнительное деформационное* уравнение, связывающее перемещения.

Изобразим примерное положение абсолютно жесткой балки *BD*, которое она займет в результате деформации упругих стержней.

☞ Как направить усилия в отброшенных стержнях? Есть два пути.

1) Увязать усилие с деформацией: если стержень получает *удлинение*, то усилие в нем направить *от узла* (см. $N_{ст}$), и, наоборот, если стержень укорачивается, то — к узлу (см. $N_{ал}$); тогда в дальнейшем уже не возникнет вопросов о знаках.

2) Направить все усилия от узла; тогда при вычислениях нужно следить: если деформация и усилия не соответствуют друг другу (например, растяжение—укорочение или сжа-

тие—удлинение), то соответствующее Δl берется отрицательным. Здесь воспользуемся первым способом.

Из схемы деформации (учитывая абсолютную жесткость балки на изгиб) видно, что

$$\frac{\Delta_D}{\Delta_C} = \frac{2a}{a},$$

откуда $\Delta_D = 2\Delta_C$. Здесь Δ_D и Δ_C — вертикальные *перемещения* соответствующих точек.

Раскрываем это уравнение, т. е. выражаем Δ_D и Δ_C сначала через *удлинения* соответствующих стержней, а затем — через *усилия* в них. В нашем случае (см. рис. 13) $\Delta_D = \Delta l_{ал}$, а $\Delta l_{ст}/\Delta_C = \cos 30°$ или $\Delta_C = \Delta l_{ст}/\cos 30°$. Но для обоих стержней удлинение (укорочение) определяется по формуле $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$, значит

$$\frac{N_{ал} l_{ал}}{E_{ал} A_{ал}} = 2\frac{N_{ст} l_{ст}}{E_{ст} \cdot A_{ст} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}},$$

или

$$\frac{N_{ал} a}{E_{ал} A_{ал}} = 2\frac{N_{ст} 2a}{3E_{ст} \cdot 0{,}5A_{ст} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Окончательно получаем $N_{ал} = 3{,}08N_{ст}$. Это выражение и позволит решить задачу, т. е. раскрыть статическую неопределимость.

Так как реакции в неподвижной опоре нам не понадобятся, то ограничимся лишь одним уравнением статики, связывающим только интересующие нас усилия в стержнях:

$$\sum M_0 = 0;\ P \cdot 2a - N_{ал} \cdot 2a - N_{ст} \sin 60° \cdot a = 0.$$

Если бы ставилась п р я м а я задача (при заданных внешних силах P определить внутренние усилия N в стержнях), то решение бы получалось из системы двух уравнений с двумя неизвестными. Здесь же поставлена задача по определению грузоподъемности, т. е. о б р а т н а я задача. Нужно четко себе представлять, что в статически неопределимых конструкциях *усилия в ее элементах* (здесь — в стержнях) *определяются не из уравнений статики, а в зависимости от распределения в ней жесткостей.* Так, если в данной задаче принять другие

соотношения площадей поперечных сечений A, модулей продольной упругости E или длин стержней l, то была бы получена другая зависимость между $N_{ал}$ и $N_{ст}$. Вот почему мы не вправе ожидать, что оба стержня будут одновременно испытывать предельно допустимые (для каждого из них) усилия, которые равны:

$$N_{ст}^{пред} = R_{ст} A_{ст} = 200 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 80 \text{ кН};$$

$$N_{ал}^{пред} = R_{ал} A_{ал} = 150 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 120 \text{ кН}.$$

Но заданное ранее соотношение жесткостей приводит к полученной выше зависимости $N_{ал} - 3{,}08 N_{ст}$.

Очевидно, что если допустить $N_{ст} = N_{ст}^{пред} = 80$ кН, тогда $N_{ал} = 3{,}08 N_{ст} = 3{,}08 \cdot 80$ кН $= 246{,}4$ кН, а это больше $N_{ал}^{пред} = 120$ кН, что *недопустимо*. Значит, остается другой вариант: $N_{ал} = 120$ кН $= N_{ал}^{пред}$, тогда $N_{ст} = N_{ал}/3{,}08 = 120/3{,}08 = 39{,}0$ кН, что допустимо (хотя и неэкономно), так как $N_{ст} = 39{,}0$ кН $< N_{ст}^{пред} = 80$ кН. Другими словами: стальной стержень недогружен и работает почти с двукратным запасом.

Подставив $N_{ал} = 120$ кН и $N_{ст} = 39{,}0$ кН в уравнение статики, получим

$$P = \frac{2N_{ал} + N_{ст}\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 \cdot 120 + 39 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 137 \text{ кН}.$$

Задача 9

Определить величину нормальных напряжений в бетоне и стальной арматуре железобетонной колонны, нагруженной силой $P = 1{,}4$ МН (рис. 14).

Принять: площадь стальной арматуры $A_с = 10$ см^2; соотношение модулей продольной упругости стали и бетона $E_с/E_б - 15$.

Решение. Сначала определяем, какую часть нагрузки воспримут на себя бетон и сталь в отдельности: неизвестными будут $N_б$ и $N_с$. В данном случае из условий равновесия можно составить только одно уравнение

$$N_б + N_с = P,$$

а недостающее уравнение составим из условия совместности деформаций бетонной и стальной

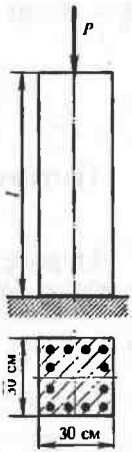


Рис. 14

частей колонны, так как они укоротятся на одну и ту же величину, поскольку их верхние и нижние плоскости совпадают. Следовательно, можно записать

$$\Delta l_б = \Delta l_с$$

или

$$\frac{N_б l}{E_б A_б} = \frac{N_с l}{E_с A_с},$$

откуда

$$N_с = N_б \frac{E_с A_с}{E_б A_б}.$$

После подстановки значения $N_с$ в первое уравнение получим

$$N_б + N_б \frac{E_с A_с}{E_б A_б} = P,$$

откуда

$$N_б = \frac{P}{1 + \frac{E_с A_с}{E_б A_б}}.$$

Подставив числовые значения, получим величину нагрузки, приходящуюся на бетонную часть колонны площадью $A_б = 30 \times 30 - 10 = 890$ см^2:

$$N_б = \frac{1{,}4}{1 + 15 \cdot \frac{10}{890}} = 1{,}2 \text{ МН}.$$

Нагрузка на стальную арматуру

$$N_с = 1{,}4 - 1{,}2 = 0{,}2 \text{ МН}.$$

Определяем нормальные напряжения сжатия в сечениях колонны (без учета ее собственного веса):

$$\sigma_б = \frac{N_б}{A_б} = \frac{-1{,}2 \cdot 10^6}{890 \cdot 10^{-4}} = -13{,}5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_с = \frac{N_с}{A_с} = \frac{-0{,}2 \cdot 10^6}{10 \cdot 10^{-4}} = -200 \text{ МПа}.$$

Задача 10

Определить начальные (монтажные) напряжения при сборке стержневой системы, один из стержней которой изготовлен короче, чем требуется, на величину Δ (рис. 15).

Стержни имеют одинаковые размеры и изготовлены из одного материала.

Решение. Очевидно, что при сборке системы все три стержня необходимо удлинить, приложив к ним растягивающие силы. В собранном виде система показана на рисунке 15, *а* штриховыми линиями. Вырежем узел C', составим уравнения равновесия сил, не учитывая изменения угла α из-за малости деформаций (рис. 15, *б*)

$$\sum X = 0; \quad N_3 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha = 0,$$

откуда

$$N_2 = N_3;$$

$$\sum Y = 0; \quad N_1 - N_2 \cos\alpha - N_3 \cos\alpha = 0.$$

Система один раз статически неопределима. Рассмотрим геометрическую часть задачи и составим уравнение перемещений. Из схемы следует, что

$$\Delta = \Delta l_1 + \delta_C, \text{ где } \delta_C = \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha}.$$

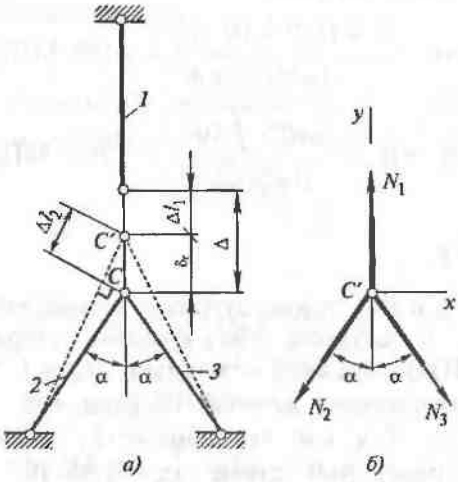


Рис. 15

Уравнение перемещений принимает вид

$$\Delta = \Delta l_1 + \frac{\Delta l_2}{\cos\alpha}.$$

Используя закон Гука, выразим удлинение через неизвестные силы в стержнях:

$$\Delta = \frac{N_1 l}{EA} + \frac{N_2 l}{EA\cos\alpha},$$

где l — длина стержней.

Решив уравнение перемещений совместно с уравнениями равновесия, получим вначале внутренние силы

$$N_1 = \frac{2\Delta EA\cos^2\alpha}{(1+2\cos^2\alpha)l};$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\Delta EA\cos\alpha}{(1+2\cos^2\alpha)l},$$

а затем, учитывая, что $\sigma = N/A$, напряжения при сборке

$$\sigma_1 = \frac{2\Delta E\cos^2\alpha}{(1+2\cos^2\alpha)l};\ \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\Delta E\cos\alpha}{(1+2\cos^2\alpha)l}.$$

Если принять, например, $\Delta = 4$ мм; $l = 4$ м; $E = 2\cdot10^5$ МПа; $\alpha = 45°$, то в итоге получим

$$\sigma_1 = \frac{2\cdot4\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^5\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{(1+2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2)\cdot4} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{4\cdot10^{-4}\cdot2\cdot10^5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{(1+2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2)\cdot4} = 70{,}7 \text{ МПа}.$$

Задача 11

Определить температурные напряжения в стержневой системе, у которой два крайних стержня — стальные ($E_c = 2\cdot10^5$ МПа), средний — медный ($E_м = 1\cdot10^5$ МПа). Все стержни нагреваются на $\Delta t = 100$ °С (рис. 16).

Решение. Так как коэффициент линейного расширения меди больше, чем стали: $\alpha_м = 1{,}65\cdot10^{-5}$ град$^{-1}$, а $\alpha_c = 1{,}25\cdot10^{-5}$ град$^{-1}$, то медный стержень, сдерживаемый сталь-

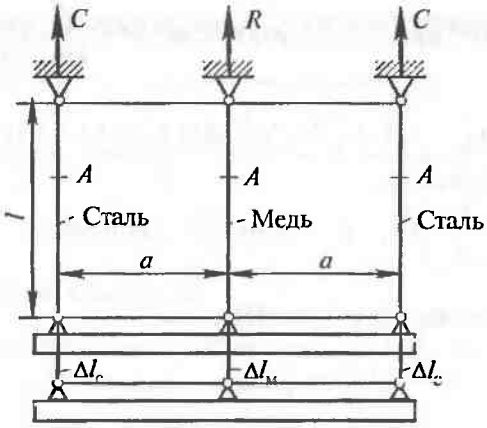


Рис. 16

ными, будет подвергаться деформации сжатия, а стальные, увлекаемые медным, — деформации растяжения.

Будем (для общности) считать направления всех трех реакций положительными. С учетом симметрии, неизвестных реакций две, а уравнение равновесия — одно: $2C + R = 0$, то есть $R = -2C$. Задача один раз статически неопределима.

Составим условие перемещений. Так как система симметрична, удлинения крайних стальных стержней равны между собой; следовательно, каждое из них равно удлинению среднего медного стержня, т. е.

$$\Delta l_{\text{с}} = \Delta l_{\text{м}}.$$

Каждое из удлинений складывается из удлинения от нагревания и от внутренних сил N в стержне. Таким образом,

$$\Delta l_{\text{с}} = \alpha_{\text{с}} l \Delta t + \frac{Cl}{E_{\text{с}} A}$$

и

$$\Delta l_{\text{м}} = \alpha_{\text{м}} l \Delta t + \frac{Rl}{E_{\text{м}} A}.$$

Из условия перемещений найдем, что

$$\frac{C}{E_{\text{с}} A} - \frac{R}{E_{\text{м}} A} = (\alpha_{\text{м}} - \alpha_{\text{с}}) \Delta t.$$

Выразив R через C и учитывая, что $\frac{C}{A}=\sigma_с$ и $E_с = 2E_м$, найдем

$$\sigma_с = \frac{2E_м(\alpha_м - \alpha_с)\Delta t}{5} = \frac{2\cdot 1\cdot 10^5 (1{,}65-1{,}25)\cdot 10^{-5}\cdot 100}{5} = 16 \text{ МПа}.$$

Так как $\frac{R}{A}=\sigma_м$, из условия равновесия следует, что $\sigma_м = -2\sigma_с$.

Следовательно, $\sigma_м = -32$ МПа.

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Важнейшие свойства

Параллельный перенос осей (рис. 17): $J_{z_1} = J_z + a^2 A$; здесь a — расстояние между осями Z и Z_1.

$$J_z + J_y = \text{const}; \quad J_\rho = J_z + J_y.$$

Главные моменты инерции и направление главных осей:

$$J_{\max/\min} = J_{V/U} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{J_{zy}}{J_V - J_y},$$

здесь α_0 есть угол между осями Z и V.

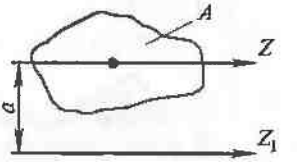


Рис. 17

Общие замечания

☝ Если сечение состоит из двух фигур, то центр тяжести всего сечения находится на отрезке, соединяющем центры тяжести этих фигур (ближе к большей).

☝ В «сложных» сечениях одна из главных осей U ($J_U = J_{\min}$) как бы «простирается» вдоль сечения, а ось V ($J_V = J_{\max}$) — ей перпендикулярна (рис. 18).

☝ Если есть хотя бы одна ось симметрии, то эта и перпендикулярная к ней оси — главные, а $J_{zy} = 0$.

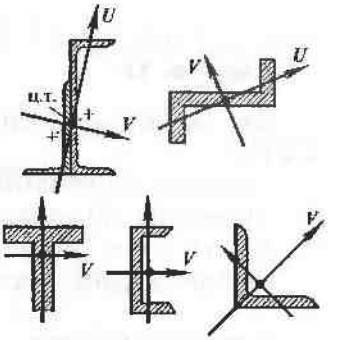


Рис. 18

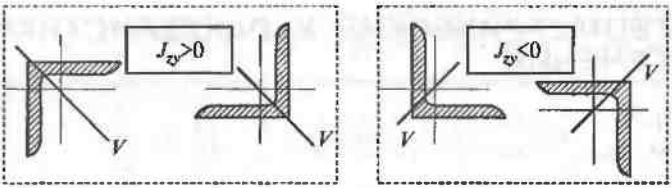


Рис. 19

☝ Если сечение содержит прокатные уголки, то знак центробежного момента инерции J_{zy} и положение главной оси V будут такими как показано на рис. 19.

Полезные формулы

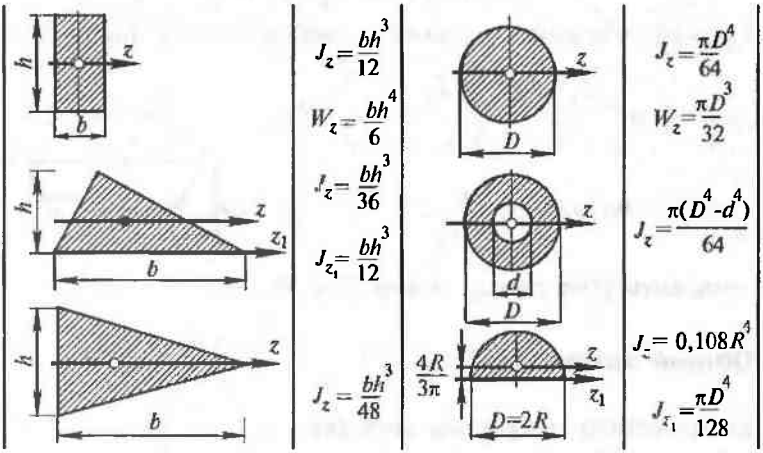


Рис. 20

Задача 12

Для заданного сечения (рис. 21, размеры в см) определить:

главные центральные моменты инерции;

моменты сопротивления.

Решение. Вычислим площади элементов сечения:

горизонтальный лист

$$A_1 = 4{,}5 \cdot 0{,}45 = 2{,}025 \text{ см}^2,$$

вертикальный лист

$$A_2 = 0{,}45 \cdot 6{,}8 = 3{,}06 \text{ см}^2,$$

тогда площадь всего сечения:

$A = 2A_1 + 3A_2 = 2 \cdot 2{,}025 + 3 \cdot 3{,}06 =$
$= 13{,}23$ см^2.

Вычислим моменты инерции J_z элементов сечения, имея в виду формулы $J_z = \frac{bh^3}{12}$ (для прямоугольного сечения) и $J_{z1} = J_z + a^2 A$ (при параллельном переносе осей):

горизонтальный лист

$$J_z = \frac{4{,}5 \cdot 0{,}45^3}{12} + 3{,}625^2 \cdot 2{,}025 =$$
$$= 0{,}034 + 26{,}610 = 26{,}64 \text{ см}^4,$$

вертикальный лист

$$J_z = \frac{0{,}45 \cdot 6{,}8^3}{12} = 11{,}79 \text{ см}^4.$$

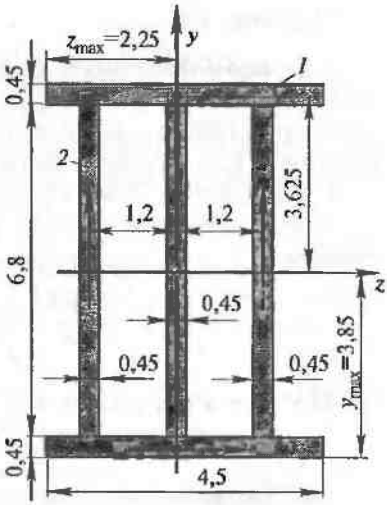


Рис. 21

Момент инерции всего сечения $J_z = 2 \cdot 26{,}64 + 3 \cdot 11{,}79 =$
$= 88{,}65$ см^4.

Аналогично вычислим моменты инерции J_y элементов сечения:

горизонтальный лист $J_y = \frac{0{,}45 \cdot 4{,}5^3}{12} = 3{,}42$ см^4,

вертикальный лист (внутренний) $J_y = \frac{6{,}8 \cdot 0{,}45^3}{12} = 0{,}05$ см^4,

вертикальный лист (каждый крайний) $J_y = \frac{6{,}8 \cdot 0{,}45^3}{12} + 1{,}2^2 \cdot 3{,}06 =$
$= 4{,}46$ см^4.

Момент инерции всего сечения $J_y = 2 \cdot 3{,}42 + 0{,}05 + 2 \cdot 4{,}46 =$
$= 15{,}81$ см^4.

Моменты сопротивления сечения:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{88{,}65}{3{,}85} = 23{,}0 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{15{,}81}{2{,}25} = 7{,}03 \text{ см}^3.$$

Задача 13

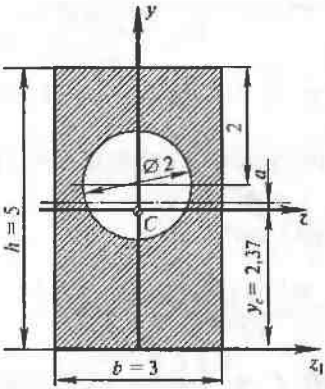
Для прямоугольного сечения с круглым вырезом (рис. 22) требуется о п р е д е л и т ь положениие главных центральных осей инерции и вычислить главные центральные моменты инерции. Все размеры даны в сантиметрах.

Р е ш е н и е. Для определения положения центра тяжести фигуры принимаем прямую Z_1 за вспомогательную ось и записываем

$$\left(3\cdot5-\frac{3{,}14\cdot2^2}{4}\right)y_c=3\cdot5\cdot2{,}5-\frac{314\cdot2^2}{4}\cdot3,$$

откуда

$$y_c=2{,}37 \text{ см}.$$



Р и с. 22

Главными центральными осями инерции являются ось Y (как ось симметрии) и перпендикулярная к ней ось Z. Моменты инерции J_z и J_y вычисляем отдельно для прямоугольника и для круга с последующим вычитанием результатов.

Для прямоугольника момент инерции относительно его центральной оси, параллельной оси Z, будет

$$\frac{bh^3}{12}=\frac{3\cdot5^3}{12},$$

а для перехода к оси Z надо прибавить

$$a^2A=(2{,}5-2{,}37)^2\cdot3\cdot5.$$

Для круга момент инерции относительно любого диаметра будет

$$\frac{\pi D^4}{64}=\frac{3{,}14\cdot2^4}{64},$$

а для перехода к оси Z придется прибавить

$$a_к^2A_к=(3-2{,}37)^2\cdot\frac{3{,}14\cdot2^2}{4};$$

тогда

$$J_z = \frac{3\cdot 5^3}{12} + (2{,}5-2{,}37)^2\cdot 3\cdot 5 - \frac{3{,}14\cdot 2^4}{64} - (3-2{,}37)^2\cdot\frac{3{,}14\cdot 2^2}{4} = 29{,}5 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции J_y вычисляем без формул перехода, так как ось Y является центральной и для прямоугольника, и для круга

$$J_y = \frac{5\cdot 3^3}{12} - \frac{3{,}14\cdot 2^4}{64} = 10{,}5 \text{ см}^4.$$

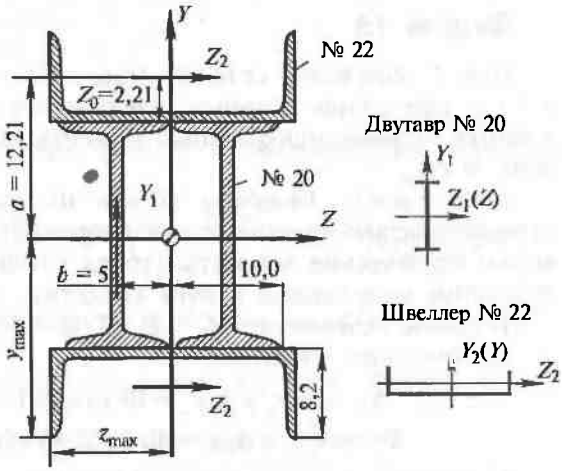
Задача 14

Для заданного сечения (рис. 23) о п р е д е л и т ь:
главные центральные моменты инерции;
моменты сопротивления.

Р е ш е н и е. Выписываем необходимые характеристики из таблиц сортамента:

$A = 26{,}8$ см^2;
$J_z = 1840$ см^4;
$J_{y1} = 115$ см^4;

$A = 26{,}7$ см^2;
$J_y = 2110$ см^4;
$J_{z2} = 151$ см^4;
$z_0 = 2{,}21$ см;
$b = 8{,}2$ см.



Р и с. 23

☞ *Обратите внимание:*

• здесь сечение швеллера расположено не так, как в таблице сортамента, — оно повернуто на 90°;

• собственные оси швеллера (Y) и двутавра (Z) совпадают с центральными осями Y и Z всего сечения.

Вычислим главные центральные моменты инерции сечения:

$$J_z = 2J_z^{дв} + 2J_z^{шв} = 2\cdot 1840 + 2(J_{z2}^{собс} + a^2A^{шв}) =$$
$$= 2\cdot 1840 + 2(151 + 12{,}21^2\cdot 26{,}7) = 3680 + 8263 = 11\,943 \text{ см}^4;$$

В таблице была другая ось!

В таблице была другая ось!

$$J_y = 2J_y^{дв} + 2J_y^{шв} = 2(J_{y1}^{собс} + b^2A^{дв}) + 2\cdot 2110 =$$
$$= 2(115 + 5^2\cdot 26{,}8) + 2\cdot 2110 = 1570 + 4220 = 5790 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления равны:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{11943}{\frac{20}{2}+8{,}2} = 656 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{5790}{11} = 526 \text{ см}^3.$$

Задача 15

Для Г-образного сечения (рис. 24) требуется определить положение главных центральных осей инерции и вычислить главные центральные моменты инерции. Все размеры даны в см.

Решение. Разобьем уголок на два прямоугольника и проведем вспомогательные оси координат Z_1 и Y_1. Затем определим статические моменты уголка относительно этих осей и вычислим координаты центра тяжести.

Площадь сечения $A = A_1 + A_2 = 2\cdot 20 + 10\cdot 2 = 40 + 20 = 60$ см^2.

Статические моменты:

$$S_{z1} = A_1y_1 + A_2y_2 = 40\cdot 10 + 20\cdot 1 = 420 \text{ см}^3;$$
$$S_{y1} = A_1z_1 + A_2z_2 = 40\cdot 1 + 20\cdot(2+5) = 180 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести уголка:

$$z_C = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{180}{60} = 3 \text{ см}; \quad y_C = \frac{S_{z1}}{A} = \frac{420}{60} = 7 \text{ см}.$$

☞ *Обратите внимание:* центр тяжести составного сечения расположен на линии, соединяющей центры тяжести составных частей, и делит расстояние между ними обратно пропорционально площадям.

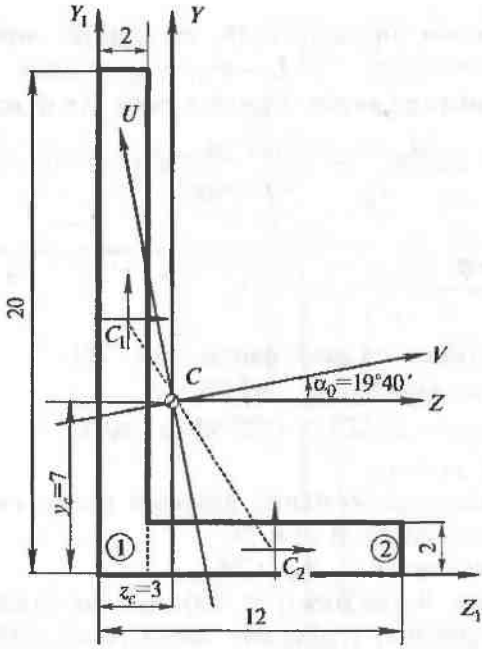


Рис. 24

Вычислим центральные осевые и центробежный моменты инерции уголка:

$$J_z = \sum(J_{z_c} + a^2 A) = \frac{2 \cdot 20^3}{12} + (10-7)^2 \cdot 40 + \frac{10 \cdot 2^3}{12} + (7-1)^2 \cdot 20 = 2420 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \sum(J_{y_c} + b^2 A) = \frac{20 \cdot 2^3}{12} + (3-1)^2 \cdot 40 + \frac{2 \cdot 10^3}{12} + (2+5-3)^2 \cdot 20 = 660 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy} = \sum(J_{z_c y_c} + abA) = 0 + (-2) \cdot 3 \cdot 40 + 0 + 4 \cdot (-6) \cdot 20 = -720 \text{ см}^4.$$

Вычислим главные моменты инерции сечения:

$$J_{V/U} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{2420 + 660}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2460 - 660}{2}\right)^2 + (-720)^2} = 1540 \pm 1137,$$

откуда $J_{\max} = J_V = 2677$ см^4; $J_{\min} = J_U = 403$ см^4.

☞ Для проверки правильности последних вычислений используем соотношение $J_z + J_y = J_{max} + J_{min} = \text{const}$.

Определяем положение главных осей (угол наклона α_0):

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{J_{zy}}{J_V - J_y} = -\frac{(-720)}{2677-660} = 0{,}357;\ \alpha_0 = 19°40'.$$

Задача 16

Дано:

сечение, состоящее из двух фигур (рис. 25):

фигура 1 — прямоугольник 20×2,75 см;

фигура 2 — уголок №12,5/8 (125×80×12 мм).

Определить:

главные центральные моменты инерции всего сечения J_V и J_U;

положение главных осей V и U;

моменты сопротивления W_V и W_U.

Решение. Выписываем из таблицы сортаментов геометрические характеристики уголка для центральных осей фигуры *2*:

$A_2 = 23{,}36$ см^2; $J_{z_2} = 364{,}79$ см^4; $J_{y_2} = 116{,}84$ см^4; $J_{z_2y_2} = 118{,}00$ см^4,

а также координаты центра тяжести уголка: $z_0 = 2{,}00$ см; $y_0 = 4{,}22$ см.

Площадь фигуры *1*: $A_1 = 20\times2{,}75 = 55$ см^2; тогда площадь всего сечения равна: $A = A_1 + A_2 = 78{,}36$ см^2.

Определяем положение центра тяжести всего сечения в осях Z_1 и Y_1:

$$y_c = \frac{\sum(A\cdot y)}{A} = \frac{-23{,}36(2{,}75/2+4{,}22)}{78{,}36} = -1{,}67 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum(A\cdot z)}{A} = \frac{23{,}36(20/2-8+2)}{78{,}36} = 1{,}19 \text{ см}.$$

Проводим *центральные* оси Z и Y, затем наносим на рисунке расстояния между этими осями и центральными осями каждой составляющей фигуры. Для осей Z и Y вычисляем *осевые и центробежный моменты инерции* сечения:

$$J_z = \frac{20\cdot2{,}75^3}{12} + 1{,}67^2\cdot55 + 364{,}79 + 3{,}93^2\cdot23{,}36 = 913 \text{ см}^4;$$

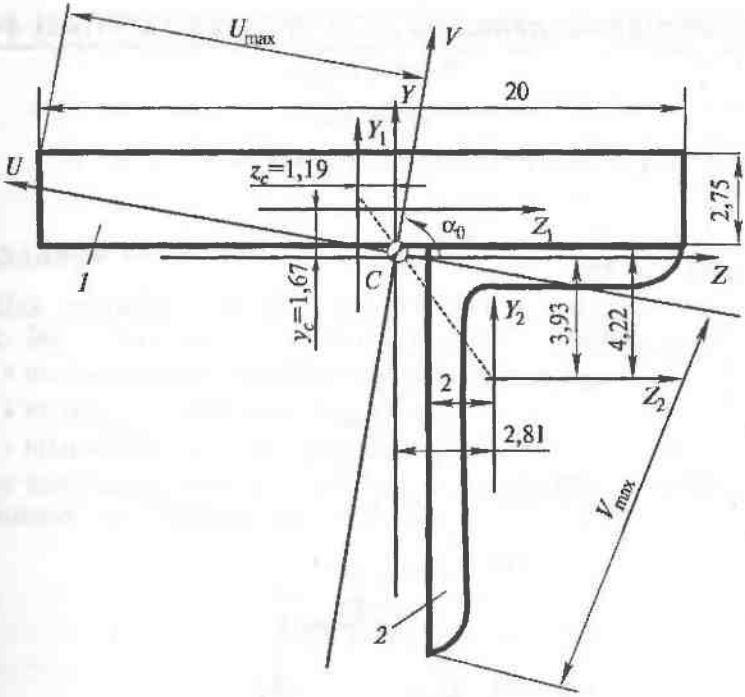


Рис. 25

$$J_y = \frac{2{,}75\cdot 20^3}{12} + 1{,}19^2\cdot 55 + 116.84 + 2{,}81^2\cdot 23{,}36 = 2213 \text{ см}^4;$$

$$J_{zy} = 0 + (-1{,}19)\cdot 1{,}67\cdot 55 + 118 + 2{,}81\cdot(-3{,}93)\cdot 23{,}36 = -249 \text{ см}^4.$$

Главные моменты инерции сечения:

$$J_{V/U} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2} =$$

$$= \frac{913+2213}{2} + \sqrt{\left(\frac{913-2213}{2}\right)^2 + (-249)^2} = 1563 \pm 696 \text{ см}^4;$$

$$J_V = 2259 \text{ см}^4; \quad J_U = 867 \text{ см}^4.$$

Положение главных осей:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{J_{zy}}{J_V - J_y} = -\frac{(-249)}{2259-2213} = 5{,}41; \quad \alpha_0 = 79{,}5^\circ.$$

Моменты сопротивления:

$$W_V = J_V / U_{max};$$

$$W_U = J_U / V_{max},$$

причем U_{max} и V_{max} измеряются на чертеже.

4 НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Задача 17

Для заданного плоского напряженного состояния в точке (рис. 26) определить (аналитически и графически):

- напряжения на произвольной площадке ($\alpha = 40°$);
- главные напряжения σ_{max} и σ_{min};
- положение главных площадок;
- экстремальные касательные напряжения с указанием площадок, по которым они действуют.

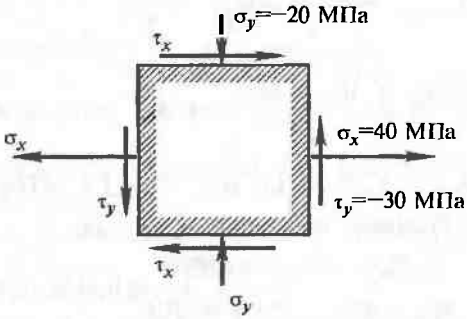


Рис. 26

Аналитическое решение

Напряжения *на произвольной площадке* ($\alpha = 40°$) (рис. 27) можно определить по формулам:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_y \sin 2\alpha =$$

$$= 40\cos^2 40° + (-20)\sin^2 40° - (-30)\sin 80° = 44{,}8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{y_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_y \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{40-(-20)}{2}\sin 80° + (-30)\cos 80° = 24{,}3 \text{ МПа}.$$

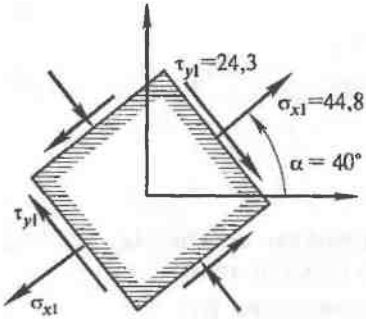


Рис. 27

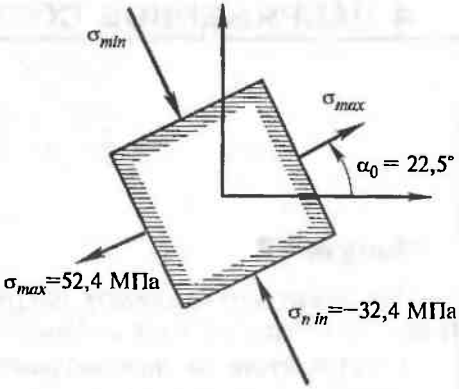


Рис. 28

Главные напряжения:

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_y^2} =$$

$$= \frac{40 + (-20)}{2} + \sqrt{\left(\frac{40 - (-20)}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 10 \pm 42{,}4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{max} = 52{,}4 \text{ МПа}; \ \sigma_{min} = -32{,}4 \text{ МПа}.$$

Положение главных площадок (рис. 28):

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{\tau_y}{\sigma_{max} - \sigma_y} = -\frac{(-30)}{52{,}4 - (-20)} = 0{,}414; \ \alpha_0 = 22{,}5°.$$

Экстремальные касательные напряжения:

$$\tau_{max/min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_y^2} = \pm 42{,}4 \text{ МПа},$$

а эти площадки располагаются под 45° к главным.

Графическое решение (круг Мора)

1) выбираем подходящий масштаб (на рис. 29 ось $X - \sigma$; ось $Y - \tau$);

2) наносим точки D_x $\{\sigma_x; \tau_y\}$ и D_y $\{\sigma_y; -\tau_y\}$, соответствующие исходным площадкам;

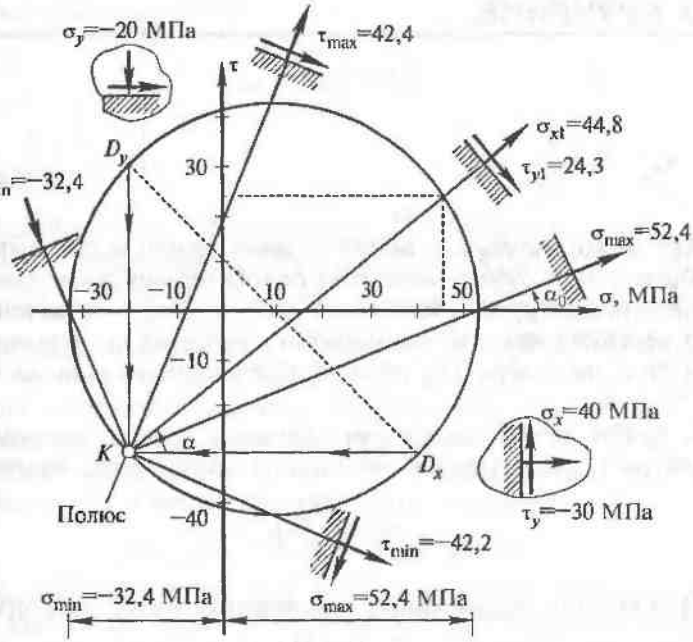


Рис. 29

3) на пересечении отрезка D_xD_y с горизонтальной осью — центр искомого круга;

4) из точки D_x проводим прямую, параллельную горизонтальной оси, а из D_y — параллельную вертикальной оси: на пересечении получим полюс K;

5) из полюса K проводим необходимые *лучи* параллельно нормалям к интересующей нас площадке или к характерным точкам круга (соответствующим главным площадкам и площадкам с $\tau_{max/min}$).

5 КРУЧЕНИЕ

Крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси от внешних нагрузок, взятых по одну сторону от сечения.

В сечениях вала, где приложены внешние сосредоточенные пары сил, на эпюре $M_{кр}$ должны быть скачки, равные моментам этих пар.

В любой точке поперечного сечения вала на расстоянии ρ от центра тяжести сечения возникают касательные напряжения

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{J_\rho}\rho.$$

Наибольшие касательные напряжения будут на контуре:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho},$$

где J_ρ — полярный момент инерции; W_ρ — полярный момент сопротивления.

Угол закручивания определяют по закону Гука:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_\rho},$$

где l — длина участка; GJ_ρ — жесткость сечения вала при кручении; φ — измеряется в радианах.

Относительный угол закручивания

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_{кр}}{G J_\rho}.$$

Проектировочный расчет вала ведется по двум условиям:

а) условие прочности

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}^{max}}{W_\rho} \le \bar{K}_{ср};$$

б) условие жесткости

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}^{max}}{GJ_p} \le [\theta].$$

Задача 18

Вращающийся с постоянной угловой скоростью шкив № 1 (рис. 30) передает трем шкивам вращающие моменты

$$M_2 = 1 \text{ кН·м}; \; M_3 = 0{,}7 \text{ кН·м}; \; M_4 = 0{,}5 \text{ кН·м}.$$

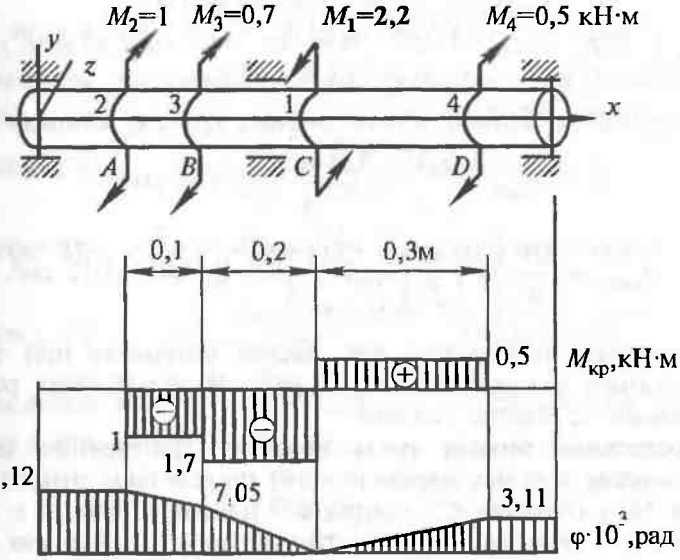
Подобрать диаметр вала сплошного и трубчатого поперечных сечений при $d/D = 0{,}8$ и $R_{ср} = 80$ МПа. Построить эпюры крутящих моментов и угловых перемещений.

Проверить условие жесткости при $[\theta] = 3$ град/м и $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Р е ш е н и е. Определяем (из условия равновесия $\sum M_z = 0$)

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 = 2{,}2 \text{ кН·м},$$

а затем, разбив вал на три участка: *AB*, *BC* и *CD*, строим эпюру крутящих моментов. В местах приложения внешних моментов (пар сил) получаются скачки на величину этих мо-



Р и с. 30

ментов. Наибольший крутящий момент возникает на участке BC: $M_{кр}^{max} = 1{,}7$ кН·м.

Из условия прочности определяем требуемую величину полярного момента сопротивления поперечного сечения

$$W_р \geq \frac{M_{кр}^{max}}{R_{ср}} = \frac{1700}{80 \cdot 10^6} = 21{,}25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 21{,}25 \text{ см}^3.$$

Учитывая, что для круглого сечения $W_р = \frac{\pi D^3}{16}$, находим диаметр сплошного вала:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 W_р}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 21{,}25}{3{,}14}} = 4{,}77 \text{ см}.$$

Для трубчатого сечения полярный момент сопротивления

$$W_р = \frac{\pi D^3}{16}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{3{,}14 D^3}{16}(1 - 0{,}8^4) = 0{,}116 D^3.$$

Вычисляем внешний и внутренний диаметры трубчатого сечения:

$$D > \sqrt[3]{\frac{W_р}{0{,}116}} = \sqrt[3]{\frac{21{,}25}{0{,}116}} = 5{,}68 \text{ см};$$

$$d = 0{,}8 \cdot 5{,}68 = 4{,}54 \text{ см}.$$

Определяем соответственно площадь круга и площадь трубы:

$$A_{круга} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 4{,}77^2}{4} = 17{,}9 \text{ см}^2;$$

$$A_{трубы} = \frac{\pi D^2}{4}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \frac{3{,}14 \cdot 5{,}68^2}{4}[1 - 0{,}8^2] = 9{,}12 \text{ см}^2.$$

Сравнение показывает, что расход материала при трубчатом сечении меньше почти в 2 раза. В дальнейших расчетах принимаем трубчатое сечение.

Построение эпюры углов поворота поперечных сечений вала (эпюры угловых перемещений) производим относительно шкива № 1 (сечение C), считая его неподвижным, т. е. $\varphi_C = 0$. Шкив № 4 (сечение D) поворачивается относительно шкива № 1 на угол

$$\varphi_D = \frac{M_{кр}^{CD} l_{CD}}{GJ_р} = \frac{500 \cdot 0{,}3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 60{,}3 \cdot 10^{-8}} = 3{,}11 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

где полярный момент инерции трубы

$$J_р = \frac{\pi D^4}{32}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] = \frac{3{,}14 \cdot 5{,}68^4}{32}[1 - 0{,}8^4] = 60{,}3 \text{ см}^4.$$

Шкив № 3 (сечение *B*) поворачивается относительно шкива № 1 (сечение *C*) на угол

$$\varphi_B = \frac{M_{кр}^{BC} l_{BC}}{GJ_р} = \frac{1700 \cdot 0{,}2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 60{,}3 \cdot 10^{-8}} = 7{,}05 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Шкив № 2 (сечение *A*) поворачивается относительно шкива № 3 (сечение *B*) на угол

$$\varphi_{AB} = \frac{M_{кр}^{AB} l_{AB}}{GJ_р} = \frac{1000 \cdot 0{,}1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 60{,}3 \cdot 10^{-8}} = 2{,}07 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Таким образом, шкив № 2 (сечение *A*) поворачивается относительно шкива № 1 (сечение *C*) на угол

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{AB} = 7{,}05 \cdot 10^{-3} + 2{,}07 \cdot 10^{-3} = 9{,}12 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Проверяем условие жесткости. Относительные углы закручивания:

на участке *CD* $\quad \theta_{CD} = \dfrac{\varphi_D}{l_{CD}} = \dfrac{3{,}11 \cdot 10^{-3}}{0{,}3} = 0{,}0104$ рад/м;

на участке *BC* $\quad \theta_{BC} = \dfrac{\varphi_B}{l_{BC}} = \dfrac{7{,}05 \cdot 10^{-3}}{0{,}2} = 0{,}0353$ рад/м;

на участке *AB* $\quad \theta_{AB} = \dfrac{\varphi_{AB}}{l_{AB}} = \dfrac{2{,}07 \cdot 10^{-3}}{0{,}1} = 0{,}0207$ рад/м.

Максимальный относительный угол закручивания (учитывая, что 1 рад ≅ 57,3 град)

$$\theta_{max} = \theta_{BC} = 0{,}0353 < [\theta] = \frac{3}{57{,}3} = 0{,}0524 \text{ рад/м}.$$

Условие жесткости выполняется.

Задача 19

Построить эпюру крутящих моментов для стержня, состоящего из двух участков разных диаметров и длин и заделанного обоими концами (рис. 31). В переходном сечении C приложен скручивающий момент M.

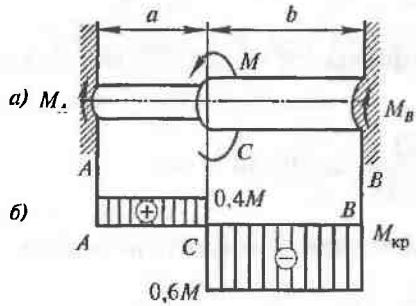


Рис. 31

Решение. Задача один раз статически неопределима, так как для определения двух реактивных моментов в заделке (рис. 31, *а*) можно составить только одно уравнение равновесия:

$$M_A + M_B = M.$$

Для решения задачи составляем деформационное уравнение. Очевидно, что $\varphi_a + \varphi_b = 0$, где угол закручивания каждого участка определяем по закону Гука $\varphi = \dfrac{M_{кр} l}{GJ_\rho}$,

где l — длина участка; GJ_ρ — жесткость поперечного сечения вала при кручении.

Учитывая, что крутящий момент на правом участке равен M_B, а на левом участке $(M_B - M)$, деформационное уравнение получает вид:

$$\frac{(M_B - M)a}{GJ_\rho^a} + \frac{M_B b}{GJ_\rho^b} = 0,$$

откуда

$$M_B = \frac{Ma}{a + b\dfrac{J_\rho^a}{J_\rho^b}}.$$

Таково значение реактивного момента в правой заделке. Момент в левой заделке найдем из условия равновесия:

$$M_A = M - M_B.$$

Пусть $a = 60$ см, $b = 120$ см, $\dfrac{J_\rho^a}{J_\rho^b} = \dfrac{1}{3}$.

Тогда

$$M_B = \frac{M \cdot 0{,}6}{0{,}6 + 1{,}2 \cdot \frac{1}{3}} = 0{,}6M,$$

$$M_A = M - 0{,}6M = 0{,}4M.$$

Эпюра крутящих моментов представлена на рисунке 31, *б*. Из решения видно, что момент распределился между участками пропорционально их жесткостям.

6 ИЗГИБ

6.1 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР

Изгиб, при котором в поперечных сечениях возникает только изгибающий момент, называется *чистым* изгибом. Однако, как правило, изгиб сопровождается одновременно как изгибающим моментом M, так и поперечной силой Q.

Поперечная сила Q в сечении численно равна алгебраической сумме внешних (поперечно направленных) сил, приложенных по одну сторону от сечения.

Изгибающий момент M в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения относительно его центра тяжести.

Правило знаков (см. рис. 32).

Поперечную силу считаем положительной, если равнодействующая внешних сил, приложенных по одну (любую) сторону от сечения, вращает оставшуюся часть балки относительно этого сечения по часовой стрелке.

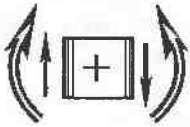


Рис. 32

Изгибающий момент считаем положительным, если вешние силы, приложенные по одну сторону от сечения, изгибают балку в области этого сечения выпуклостью вниз.

Графическое изображение изменения поперечной силы и изгибающего момента по длине балки в виде эпюр весьма удобно, так как придает расчету наглядность, позволяет быстрее находить опасные сечения и облегчает подбор размеров сечений балки.

Эпюра поперечной силы есть график, ордината которого в каждой точке выражает в масштабе величину поперечной силы в данном сечении. Положительные значения поперечной силы откладываются вверх от оси, отрицательные — вниз.

Эпюра изгибающего момента есть график, ордината которого в каждой точке выражает в масштабе величину изгибающего момента в данном сечении. Ординаты эпюры M будем от-

кладывать в сторону выпуклости балки (в машиностроении применяют обратное правило). Так как положительный момент соответствует направлению выпуклости вниз, то положительный момент откладываем вниз, а отрицательный — вверх.

Дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки q, поперечной силой Q и изгибающим моментом M

$$q = \frac{dQ}{dx};\ Q = \frac{dM}{dx}$$

позволяют выявить некоторые закономерности, представленные на рисунке 33: слева — для эпюр Q, справа — для эпюр M.

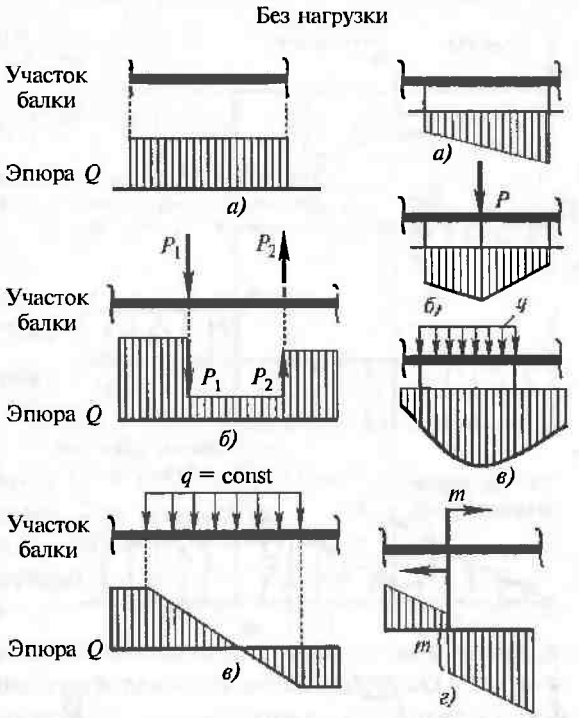


Рис. 33

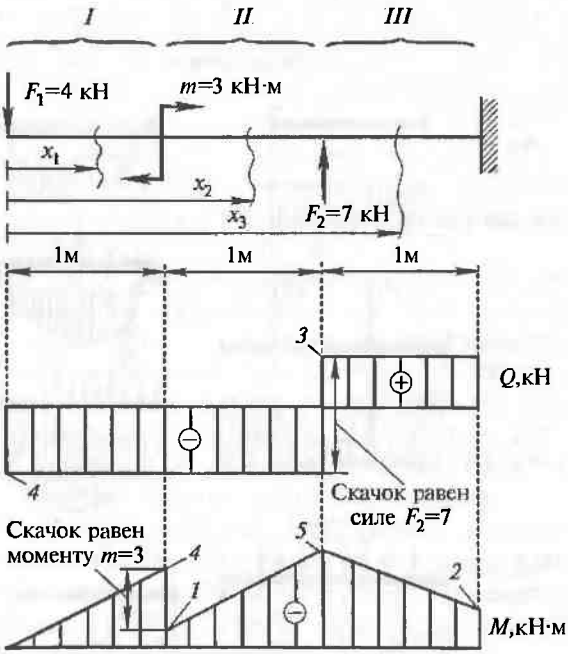
Задача 20

Для заданной нагруженной балки (рис. 34) п о с т р о и т ь эпюры внутренних усилий.

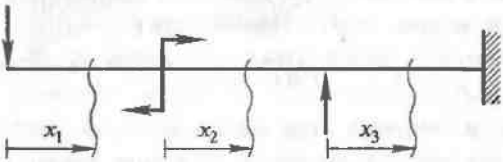
Р е ш е н и е. Так как балка консольная, то опорные реакции можно не определять.

Разбиваем балку на участки — их три (см. рисунок), для каждого устанавливаем границы. Очень важно правильно определить пределы изменения координаты x на каждом участке. Здесь возможны два варианта:

1) отсчет всегда вести от одной точки, от начала координат;



Р и с. 34



Р и с. 35

2) на каждом новом участке «забивать новый колышек» (рис. 35). Первый вариант — универсальный, он в дальнейшем пригодится и для решения других задач. Второй — удобный для решения конкретной задачи — построения эпюр.

Опыт показывает, что в выборе параметра x, несмотря на кажущуюся простоту, зачастую возникают проблемы. Этого наверняка можно избежать, если не пренебрегать четким изображением параметра x на каждом участке. Так, в данной задаче по 2-му варианту параметр x, очевидно, на всех участках изменяется от 0 до 1. Соответственно по-своему будут выглядеть выражения для Q и M, хотя окончательные значения моментов и поперечных сил, а значит и эпюры, не зависят от выбранного варианта. Здесь и в дальнейшем будем пользоваться в каждой задаче одним, в основном первым, универсальным подходом.

I участок (рис. 36): $0 < x_1 < 1$.

$Q(x) = -F_1 = -4$ кН.

$M(x) = -F_1\ x_1 = -4x_1$;

$M(x_1 = 0) = 0$; $M(x_1 = 1) = -4$ кН·м.

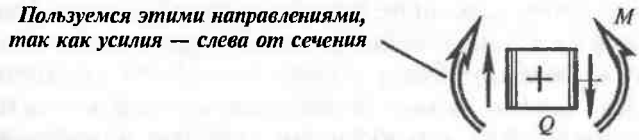


Рис. 36

II участок: $1 < x_2 < 2$.

$Q(x) = -F_1 = -4$ кН.

$M(x) = -F_1x_2 + m = -4x_2 + 3$;

$M(x_2 = 1) = -1$ кН·м; $M(x_2 = 2) = -5$ кН·м.

III участок: $2 < x_3 < 3$.

$Q(x) = -F_1 + F_2 = -4 + 7 = 3$ кН.

$M(x) = -F_1\ x_3 + m + F_2\ (x_3 - 2) = -4x_3 + 3 + 7(x_3 - 2)$;

$M(x_3 = 2) = -5$ кН·м; $M(x_3 = 3) = -2$ кН·м.

☞ В качестве рекомендаций — для снижения вероятности появления ошибок в расчетах — НЕ СЛЕДУЕТ:

- раскрывать (с приведением подобных членов) выражения для M_x или Q_x;
- приводить индексы у параметра x;
- нагрузку обозначать буквами — лучше сразу давать ее в цифрах.

Эти рекомендации не носят обязательный характер, но их применение упрощает записи, ускоряет получение результата, поэтому в дальнейшем их будем использовать.

По найденным на концах участков значениям с учетом вида полученных выражений (постоянное значение либо линейное уравнение) строим эпюры Q и M. Принято (в строительных расчетах) эпюру M строить на растянутых волокнах, т. е. плюс будет ниже оси эпюры.

Для проверки эпюр обратим внимание на скачки (разрывы функции):

на **эпюре** Q скачки всегда будут в том сечении, где есть **сосредоточенная сила**;

на **эпюре** M скачки всегда будут в том сечении, где есть **сосредоточенный момент**.

Из вышеприведенного следует и обратное, а именно: где есть скачок — там на балке соответствующая внешняя нагрузка. Например, на правом конце балки скачкообразное изменение внутренних усилий и на эпюре Q, и на эпюре M. Это не что иное, как значения реакций в заделке. Направление их нужно устанавливать с учетом правила знаков. В нашем случае реакции будут справа от самого крайнего сечения балки, значит нужно использовать «правую часть» ориентира знаков: так, вертикальная реакция направлена вниз (так как $Q = +3$ кН), а момент в заделке — по часовой стрелке (так как $M = -2$ кН·м).

Задача 21

Для заданной нагруженной балки (рис. 37) построить эпюры внутренних усилий.

Решение. Прежде всего, по правилам статики **определяем опорные реакции** с обязательной (!) их проверкой, так как ошибка в вычислениях впоследствии обязательно проявится.

☝ При построениях эпюр нужно принять за **правило**: *если какая-нибудь реакция получилась отрицательной, то нужно изменить ее направление на противоположное;* тогда дальше не будет путаницы в знаках.

I участок: $0 < x \le 2$.

$Q(x) = +9$ кН.

$M(x) = +9x$ $M(x = 0) = 0$; $M(x = 2) = 18$ кН·м.

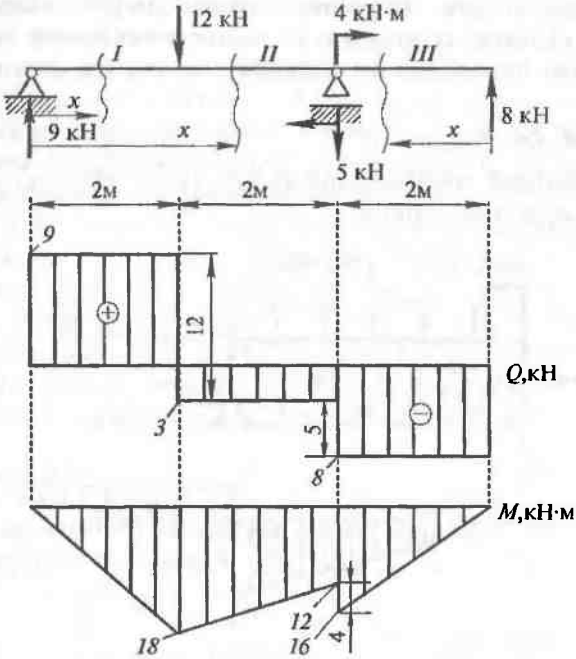


Рис. 37

II участок: $2 < x < 4$.

$Q(x) = +9 - 12 = -3$ кН.

$M(x) = +9x - 12(x-2)$; $M(x=2) = 18$ кН·м; $M(x=4) = 12$ кН·м.

III участок: $0 < x < 2$.

☞ *Обратите внимание:* здесь будем вычислять Q и M от силы справа, так как если продолжать вычислять их от усилий слева, то получим более громоздкие выражения для Q и M, хотя результаты будут те же. Изменено также и направление x, хотя это уже второстепенно и необязательно.

$Q(x) = -8$ кН (рис. 38).

$M(x) = +8x$;

$M(x = 0) = 0$; $M(x = 2) = 16$ кН·м.

Рис. 38

По вычисленным значениям строим эпюры. Убедимся, что величины скачков совпадают с соответствующими нагрузками (при неверно определенных реакциях скачки не совпадут).

Задача 22

Для заданной нагруженной балки (рис. 39) построить эпюры внутренних усилий.

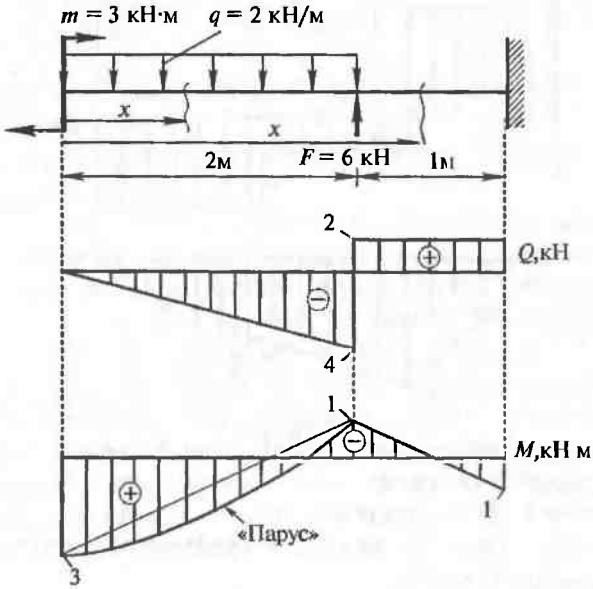


Рис. 39

Решение. Балка консольная, поэтому сразу (не определяя опорные реакции) приступаем к построению эпюр, предварительно определив количество участков — их всего два.

По сравнению с предыдущими задачами на построение эпюр, здесь присутствуют все основные типы внешних нагрузок: сосредоточенные момент, сила и распределенная нагрузка. Напомним, что существуют следующие дифференциальные зависимости: $q = dQ/dx$, $Q = dM/dx$.

I участок: $0 < x < 2$ (рис. 40).

$Q(x) = -qx = -2x$; $Q(x = 0) = 0$; $Q(x = 2) = -4$ кН.

$M(x) = m - qx^2/2 = 3 - x^2$;

$M(x = 0) = 3$ кН·м; $M(x = 2) = -1$ кН·м.

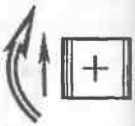


Рис. 40

II участок: $2 < x < 3$.

$Q(x) = -q2 + F = -4 + 6 = 2$ кН.

$M(x) = +m - q \cdot 2(x-1) + F(x-2) = +\ 3 - 4(x-1) + 6(x-2)$;

$M(x=2) = -1$ кН·м; $M(x=3) = 1$ кН·м.

По найденным значениям строим эпюры и анализируем их с учетом дифференциальных зависимостей. На первом участке — равномерно распределенная нагрузка q, значит здесь на эпюре Q будет линейная зависимость (прямая, строящаяся по двум концевым точкам), а на эпюре M — парабола.

Для ее изображения применяем так называемое ПРАВИЛО ПАРУСА: воображаемый парус, натянутый на концевые ординаты участка эпюры M, как бы наполняется ветром — нагрузкой q. При этом в сечении, где $Q = 0$, значение M на данном участке будет экстремальное, так как $Q = dM/dx$.

Задача 23

Для заданной нагруженной балки (рис. 41) п о с т р о и т ь эпюры внутренних усилий.

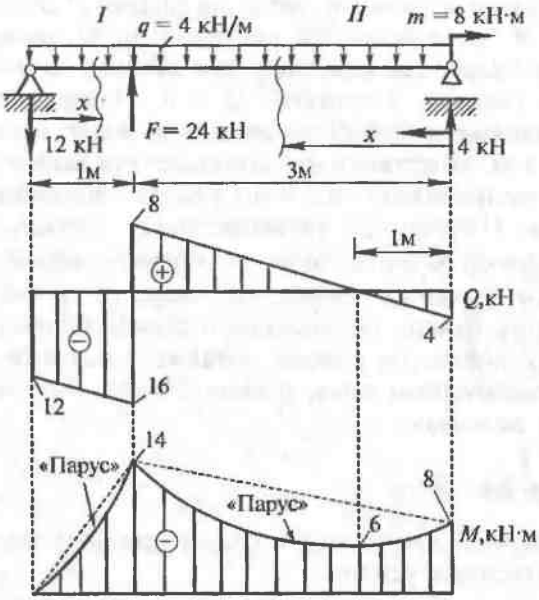


Рис. 41

Р е ш е н и е. Повторим, что прежде всего по правилам статики определяем опорные реакции с обязательной их проверкой.

Помним правило: *если какая-нибудь реакция получилась отрицательной, то нужно изменить ее направление на противоположное.*

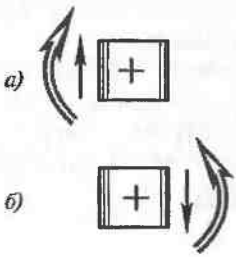


Рис. 42

I участок: $0 < x < 1$ (рис. 42, *а*).

$Q(x) = -12 - 4x$; $Q(x = 0) = -12$ кН;

$Q(x = 1) = -16$ кН.

$M(x) = -12x - 4x \cdot x/2 = -12x - 2x^2$;

$M(x = 0) = 0$;

$M(x = 1) = -14$ кН·м.

II участок: $0 \le x \le 3$ (рис. 42, *б*).

$Q(x) = -4 + 4x$; $Q(x = 0) = -4$ кН;

$Q(x = 3) = 8$ кН.

$M(x) = +4x - 4x \cdot x/2 - 8 = 4x - 2x^2 - 8$;

$M(x = 0) = -8$ кН·м;

$M(x = 3) = -14$ кН ·м.

Строим эпюры и проверяем их с учетом дифференциальных зависимостей. На обоих участках — равномерно распределенная нагрузка q, значит, везде на эпюре Q будет прямая, а на эпюре M — парабола. На первом участке локального экстремума не будет, так как здесь нет сечения с $Q = 0$. На втором — есть сечение, в котором $Q = 0$. Находим его положение, приравнивая нулю Q на этом участке, т. е. $-4 + 4x = 0$, откуда $x = 1$ м. Подставив это значение x в выражение для M, определим экстремальное (на этом участке) значение: $M(x = 1) = -6$ кН·м. Полученное значение будет третьей точкой для параболы, изображаемой также по правилу паруса.

Проверим скачки на эпюрах: на эпюре M он есть только на правом конце балки, где приложен сосредоточенный момент; на эпюре Q скачки на опорах, а также в сечении, где приложена сосредоточенная сила, равная 24 кН, — он, естественно, равен этой величине.

Задача 24

Для заданной нагруженной балки (рис. 43) п о с т р о и т ь эпюры внутренних усилий.

Р е ш е н и е. Напомним, что вначале по правилам статики определяем опорные реакции с обязательной их проверкой.

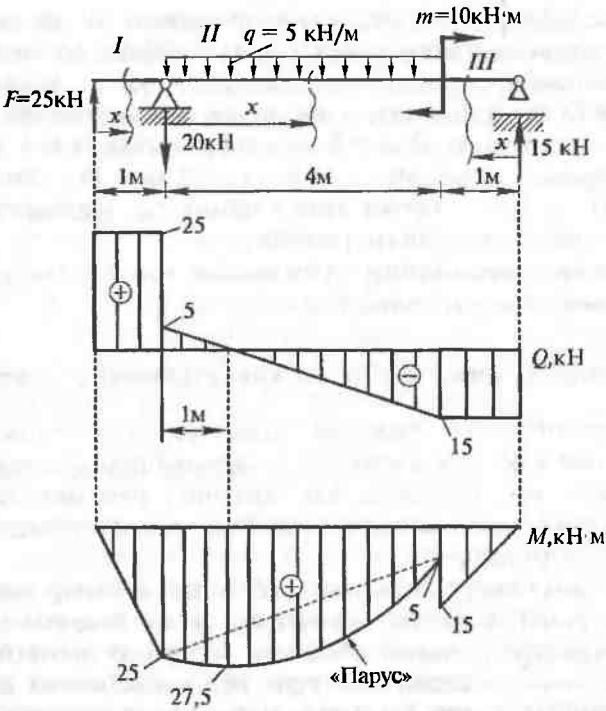


Рис. 43

Здесь также применяем правило: *если какая-нибудь реакция получилась отрицательной, то нужно изменить ее направление на противоположное.*

I участок: $0 \le x < 1$ (рис. 44, *а*).

$Q(x) = +25$ кН.

$M(x) = +25x$;

$M(x = 0) = 0$; $M(x = 1) = 25$ кН·м.

II участок: $0 \le x < 4$ (рис. 44, *б*).

$Q(x) = +25 - 20 - 5x = 5 - 5x$;

$Q(x = 0) = 5$ кН; $Q(x = 4) = -15$ кН.

$M(x) = +25(x + 1) - 20x - 5x \cdot x/2 =$

$= 25(x + 1) - 20x - 2{,}5x^2$;

$M(x = 0) = 25$ кН·м; $M(x = 4) = 5$ кН·м.

III участок: $0 \le x < 1$.

$Q(x) = -15$ кН.

$M(x) = +15x$;

$M(x = 0) = 0$; $M(x = 1) = 15$ кН·м.

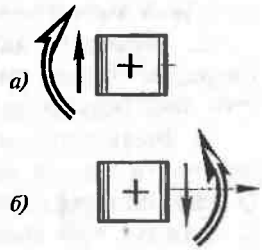


Рис. 44

Строим эпюры Q и M, затем проверяем их по дифференциальным зависимостям $q = dQ/dx$, $Q = dM/dx$. На втором участке — равномерно распределенная нагрузка q, значит, здесь на эпюре Q будет прямая, а на эпюре M — парабола. Определяем ее экстремум: $Q(x) = 5 - 5x = 0$, откуда $x = 1$ м. Тогда экстремальное значение $M(x = 1) = 25(x + 1) - 20x - 2{,}5x^2 = 27{,}5$ кН·м. Это — третья точка параболы, изображаемой по правилу паруса на данном участке.

После построения эпюр убеждаемся, что *все скачки получены в соответствующих сечениях.*

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР Q И M ПО ХАРАКТЕРНЫМ ТОЧКАМ

Построение эпюр, пожалуй, самая первостепенная по важности и наиболее востребуемая в дальнейшем процедура. Это то средство, без которого, как правило, невозможно решать задачи строительной механики вообще и сопротивления материалов в частности.

В тех ситуациях, когда нет требований к построению эпюр с обязательной записью уравнений, а необходимые навыки уже приобретены, можно обойтись без этого достаточно трудоемкого этапа и строить эпюры непосредственно по характерным точкам. Такую методику (без записи уравнений) крайне важно освоить: она существенно экономит время, затрачиваемое на построение эпюр.

В этом случае непосредственно в характерных сечениях вычисляют конкретные числовые значения Q и M. Порядок действий может быть таким:

1. Найти с помощью уравнений равновесия опорные реакции (для консольных балок этот пункт можно не выполнять).

2. Наметить **характерные сечения**, в которых приложены сосредоточенная сила, сосредоточенный момент или прерывается распределенная нагрузка.

3. Вычислить значения Q в необходимых характерных сечениях (в местах приложения сосредоточенной силы величина Q изменяется скачкообразно, поэтому здесь нужно определять Q дважды: при подходе слева и справа). Построить эпюру Q, учитывая дифференциальную зависимость $q = dQ/dx$:

где $q = 0$, там $Q = \text{const}$;

где $q = \text{const}$, там Q — линейная функция, выражаемая наклонной прямой на эпюре Q.

4. Вычислить значения M в необходимых характерных сечениях (в местах приложения сосредоточенного момента величина M изменяется скачкообразно, поэтому здесь нужно определять M дважды: при подходе слева и справа). Построить эпюру M, учитывая зависимость $Q = dM/dx$:

где $Q = \text{const}$, там M — линейная функция, выражаемая наклонной прямой;

если на участке с распределенной нагрузкой есть сечение, где $Q = 0$, то в нем значение M будет *экстремальным*: вначале по эпюре Q уточняем положение этого дополнительного характерного сечения, а затем вычисляем в нем значение M; эта точка, вкупе с концевыми, позволяет на данном участке эпюры M изобразить параболу *по правилу паруса*.

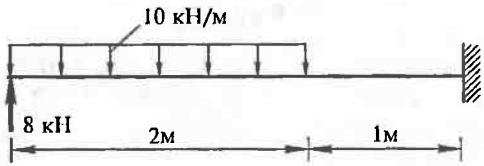
ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ

Умение правильно строить эпюры для балок — это, без сомнения, необходимое (хотя и недостаточное) условие сдачи экзамена и нормального обучения (например, в строительной механике без этого умения просто не обойтись, а есть еще теория упругости, теория устойчивости, строительные конструкции и т.д. и т.п.). Поэтому кроме обязательных задач нужно самостоятельно потренироваться в этом крайне важном деле. Тут, как никогда, подойдет принцип: чем больше, тем лучше!

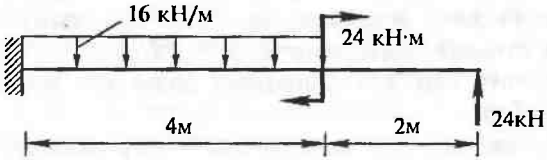
Попробуйте самостоятельно построить эпюры Q и M для приведенных ниже балок с заданной нагрузкой (рис. 45).

Решения можно проверить: на следующей странице приведены все эпюры.

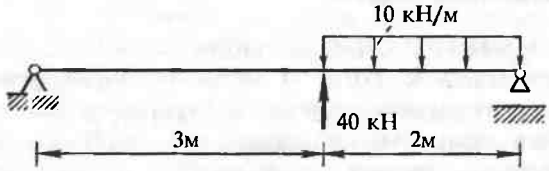
Задача 25



Задача 26



Задача 27



Задача 28

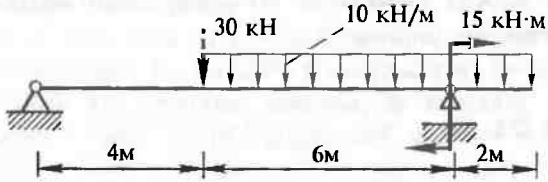


Рис. 45

Ответы к задачам 25 — 28 (рис. 46)

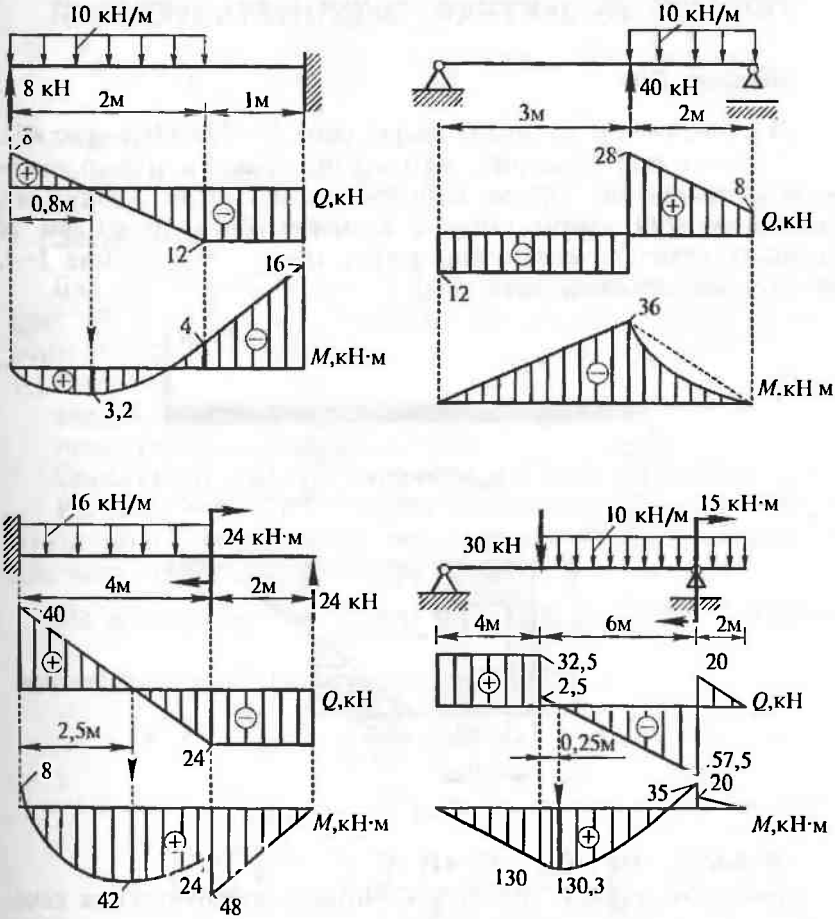


Рис. 46

6.2 ТРИ ТИПА ЗАДАЧ: ПРЯМАЯ, ПРОЕКТНАЯ, ЭКСПЛУАТАЦИОННАЯ

Задача 29

Проверить прочность балки, если $R = 150$ МПа (рис. 47).

Решение. В задачах такого типа решение нужно начинать с построения эпюры изгибающих моментов (эпюры M), однако в этой задаче сечение с наибольшим значением M (опасное сечение) можно определить сразу — это сечение *1–1*, проходящее через правую опору.

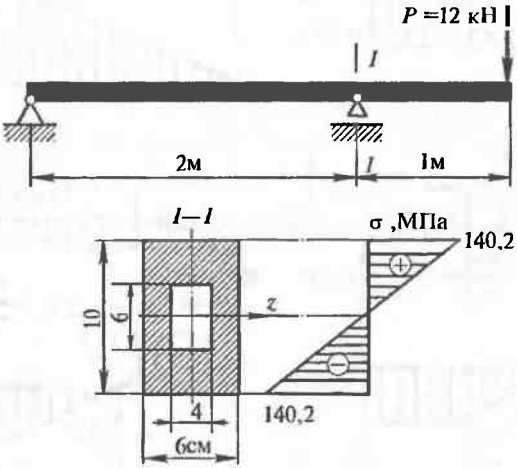


Рис. 47

Очевидно, что $M_{max} = 12$ кН·м.

Вычислим момент инерции и момент сопротивления сечения относительно нейтральной оси:

$$J_z = \frac{6 \cdot 10^3}{12} - \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 428 \text{ см}^4;$$

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} = \frac{428}{5} = 85{,}6 \text{ см}^3.$$

☞ *Обратите внимание:* было бы грубой ошибкой вычислять момент сопротивления как разность моментов сопротивления

наружного и внутреннего прямоугольников, на которые разбивали сечение при вычислении J_z .

Наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{12000}{85{,}6 \cdot 10^{-6}} = 140{,}2 \text{ МПа} < R = 150 \text{ МПа},$$

т. е. прочность балки обеспечена.

Эпюра σ показана на рис. 47.

Задача 30

Для деревянной балки ($R = 10$ МПа) с заданной нагрузкой (рис. 48) т р е б у е т с я подобрать по условию прочности размеры поперечных сечений:

круглого;

квадратного;

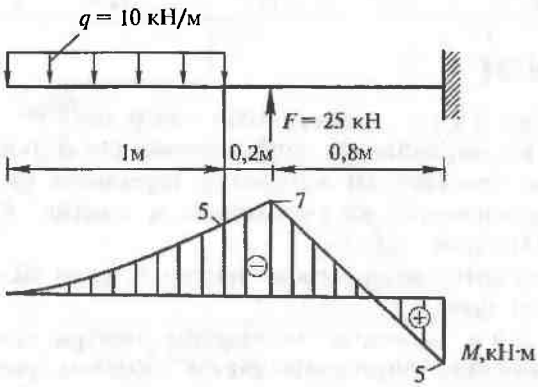
прямоугольного с $h=2b$ и $h=3b$.

Сопоставить затраты материала для всех вариантов.

Р е ш е н и е. Для подбора поперечного сечения балки нужно знать *максимальный* (по модулю) изгибающий момент, для чего строим только эпюру M.

Из условия прочности при изгибе $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} < R$ находим *требуемый* момент сопротивления сечения:

$$W_z^{треб} = \frac{M_{max}}{R} = \frac{7000}{10 \cdot 10^6} = 700 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 700 \text{ см}^3.$$



Р и с. 48

Для кругового сечения $W_z = \pi d^3/32$, тогда $d > \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 700}{3{,}14}} = 19{,}3$ см.

Для прямоугольного сечения $W_z = bh^2/6$, поэтому имеем:

для квадратного сечения $W_z = aa^2/6$, значит $a > \sqrt[3]{6 \cdot 700} = 16{,}1$ см;

для прямоугольного ($h = 2b$) сечения $W_z = b(2b)^2/6$,

тогда $b > \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 700}{4}} = 10{,}2$ см, $h = 20{,}4$ см;

для прямоугольного ($h = 3b$) сечения $W_z = b(3b)^2/6$,

тогда $b > \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 700}{9}} = 7{,}8$ см, $h = 23{,}4$ см.

Вычисляем площади поперечных сечений всех четырех видов:

для круглого сечения $A = \pi d^2/4 = 3{,}14 \cdot 19{,}3^2/4 = 289$ см^2;

для квадратного сечения $A = a^2 = 16{,}1^2 = 259$ см^2;

для прямоугольного ($h = 2b$) сечения $A = bh = 10{,}2 \cdot 20{,}4 = 208$ см^2;

для прямоугольного ($h = 3b$) сечения $A = bh = 7{,}8 \cdot 23{,}4 = 183$ см^2.

Данные для сопоставления площадей поперечных сечений (а значит, и объема балки) хорошо свести в таблицу (или проиллюстрировать графиком):

Тип сечения	*Круг*	*Квадрат*	*Прямоугольник* $h = 2b$	*Прямоугольник* $h = 3b$
Площадь, см^2	289	259	208	183
Соотношение, %	100	89,6	72,0	63,3

Задача 31

Определить допускаемую нагрузку P из условия прочности по нормальным напряжениям для балки с тавровым поперечным сечением из материала, имеющего различное расчетное сопротивление на растяжение и сжатие: $R_р = 60$ МПа, $R_с = 100$ МПа (рис. 49).

Как изменится допускаемая нагрузка, если балку расположить полкой вниз?

Решение. Находим положение центра тяжести поперечного сечения, определяя таким образом расстояние до нейтральной оси от нижней кромки:

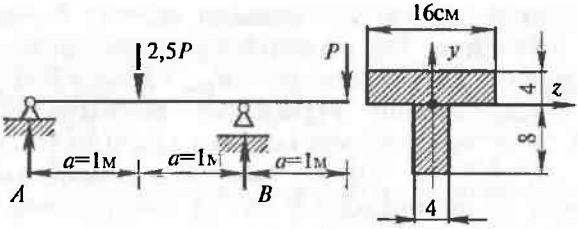


Рис. 49

$$y_C = \frac{4\cdot 8\cdot 4 + 16\cdot 4\cdot 10}{4\cdot 8 + 16\cdot 4} = 8 \text{ см}.$$

Определяем момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси

$$J_Z = \frac{4\cdot 8^3}{12} + 4^2\cdot 4\cdot 8 + \frac{16\cdot 4^3}{12} + 2^2\cdot 16\cdot 4 = 1024 \text{ см}^4.$$

Найдем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \quad -2{,}5P\cdot 1 - P\cdot 3 + B\cdot 2 = 0,$$

откуда $B = 2{,}75P$;

$$\sum M_B = 0; \quad -A\cdot 2 + 2{,}5P\cdot 1 - P\cdot 1 = 0,$$

откуда $A = 0{,}75P$.

Строим эпюру изгибающих моментов (рис. 50).

Вследствие того, что материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, наиболее напряженным в данном случае оказывается среднее сечение между опорами, хотя в сече-

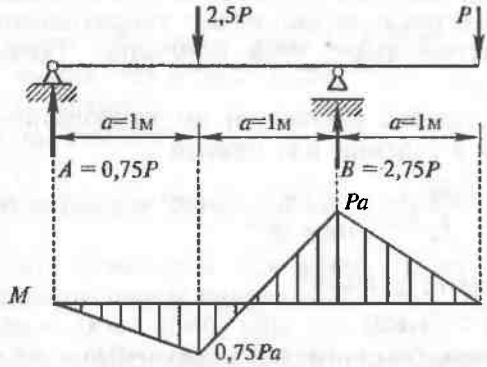


Рис. 50

нии над правой опорой изгибающий момент больше. Действительно, в сечении, где изгибающий момент имеет наибольшую величину (над опорой) $M_{max} = Pa$ кН·м, верхние волокна, испытывающие растяжение, расположены на расстоянии 4 см от нейтральной оси, а в среднем сечении между опорами ($M = 0{,}75Pa$ кН·м) наиболее растянутые волокна расположены на расстоянии 8 см от нейтральной оси сечения. Подтвердим это расчетами.

Запишем условие прочности по наибольшим растягивающим напряжениям в среднем сечении между опорами

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y_р = \frac{0{,}75Pa}{1024 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-2} \le R_р = 60 \cdot 10^6,$$

откуда $P < \dfrac{1024 \cdot 10^{-8} \cdot 60 \cdot 10^6}{0{,}75 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = 10240$ Н или $P < 10{,}24$ кН.

Запишем условие прочности по наибольшим растягивающим напряжениям в сечении над опорой

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y_р = \frac{Pa}{1024 \cdot 10^{-8}} \cdot 4 \cdot 10^{-2} \le R_р = 60 \cdot 10^6,$$

откуда $P < \dfrac{1024 \cdot 10^{-8} \cdot 60 \cdot 10^6}{1 \cdot 4 \cdot 10^{2}} = 15360$ Н или $P \le 15{,}36$ кН, что и требовалось доказать.

Наибольшие сжимающие напряжения не будут определяющими. Действительно, напряжение в нижних волокнах сечения над опорой возрастет по сравнению со средним сечением между опорами пропорционально изгибающему моменту, но соотношение расчетных сопротивлений на сжатие и на растяжение выше этой величины. Также подтвердим это расчетами.

Запишем условие прочности по наибольшим сжимающим напряжениям в сечении над опорой

$$\sigma = \frac{M}{J_z} y_с = \frac{Pa}{1024 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-2} \le R_с = 100 \cdot 10^6,$$

откуда $P < \dfrac{1024 \cdot 10^{-8} \cdot 100 \cdot 10^6}{1 \cdot 8 \cdot 10^{-2}} = 12800$ Н или $P < 12.80$ кН. Естественно, что определяющим будет наименьшее из всех полученных значений P, т. е. окончательно принимаем $\boldsymbol{P = 10{,}24}$ **кН**.

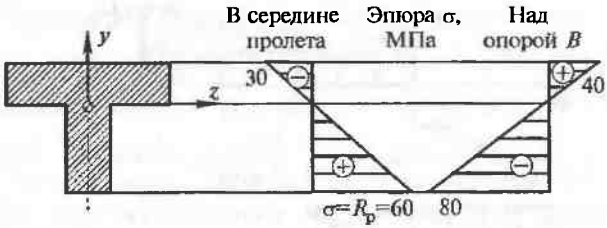


Рис. 51

Эпюры σ для рассмотренных сечений при допускаемой нагрузке P представлены на рисунке 51. Опасное сечение — в середине пролета.

Если же балку повернуть полкой вниз, наиболее напряженным станет сечение над правой опорой, допускаемая нагрузка определится неравенством $P < 7{,}68$ кН (докажите самостоятельно). Таким образом, рациональнее расположить балку полкой сверху.

☞ *Обратите внимание:* это не есть вывод на все случаи — все зависит от конкретных нагрузок, соотношений расчетных сопротивлений и параметров сечения. Необходим конкретный тщательный анализ всех потенциально возможных опасных точек.

6.3 НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Задача 32

Стальная балка, расчетная схема и нагрузка которой заданы (рис. 52), выполнена в двух вариантах:

а) из одного двутавра;

б) из двух швеллеров.

Требуется:

1) подобрать сечения балки для двух вариантов и сопоставить их массу;

2) определить изменение показаний тензометра, установленного в середине длины двутавровой балки. Принять коэффициент увеличения $k = 1000$, база $l_т = 20$ мм. Тензометр установлен под углом 45° к продольной оси балки, ниже ее на $0{,}2h$, здесь h — высота двутавра (рис. 53).

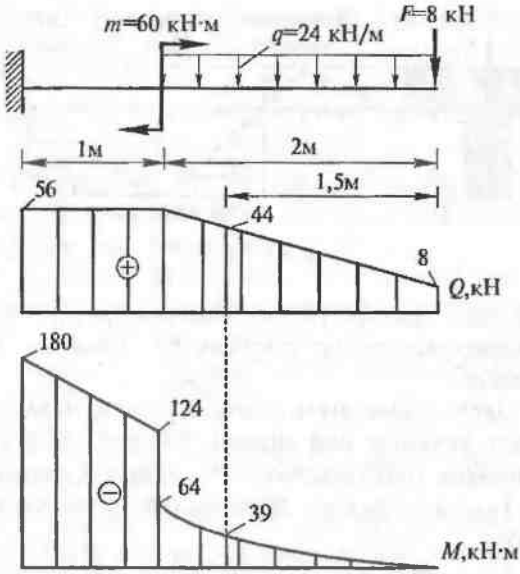


Рис. 52

Решение.

1. Подбираем по условию прочности ($R = 210$ МПа) сечения балки, предварительно построив эпюру M (строим также и эпюру Q). Из эпюры M видно, что $M_{max} = 180$ кН·м. Определим *требуемый момент сопротивления сечения*:

$$W_z^{треб} > M_{max}/R = 180\,000/(210 \cdot 10^6) = 857 \cdot 10^{-6}\ м^3 = 857\ см^3.$$

а) В таблице сортаментов ближайший по величине W_z *двутавр №40* имеет $W_z = 953$ см^3.

б) Подбираем два швеллера: $W_z^{треб(шв)} = 857/2 = 428{,}5$ см^3; у ближайшего по величине W_z (одного) швеллера №33 (с уклоном внутренних граней полок) $W_z = 484$ см^3.

Проверим прочность балки по касательным напряжениям (в точках нейтральной оси сечений с $Q_{max} = 56$ кН) *по формуле Д.И.Журавского*:

$$\tau_{max} = Q_{max} S_z^{полус}/(J_z b) \le R_{ср}\ ,\ приняв\ R_{ср} = 140\ МПа.$$

а) У двутавра (из таблицы: $S_z^{полус} = 545$ см^3; $J_z = 19\,062$ см^4; $b = 0{,}83$ см)

$$\tau_{max} = Q_{max} S_z^{полус}/(J_z b) = 56\,000 \cdot 545 \cdot 10^{-6}/(19\,062 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}83 \cdot 10^{-2}) = 19{,}3\ МПа.$$

б) У швеллеров (для 1-го швеллера из таблицы:

$$S_z^{\text{полус}} = 281 \text{ см}^3;\ J_z = 7980 \text{ см}^4;\ b = 0{,}7 \text{ см})$$

$$\tau_{max} = 56\,000 \cdot 2 \cdot 281 \cdot 10^{-6}/(2 \cdot 7980 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 0{,}7 \cdot 10^{-2}) = 14{,}1 \text{ МПа}.$$

В обоих случаях $\tau_{max} \le R_{ср}$.

Для сопоставления масс балок по вариантам а) и б) достаточно (так как они изготовлены из одного материала и одной длины) сравнить площади поперечных сечений, взяв их из таблицы:

а) у двутавра $A = 72{,}6$ см^2;

б) у швеллеров $A = 2 \cdot 46{,}5 = 93$ см^2.

Таким образом, масса двутавровой балки составляет 78% (72,6·100/93) от массы балки из двух швеллеров, а значит, двутавр использовать выгоднее.

2. Определим теперь изменение показания тензометра, установленного в середине длины двутавровой балки, как показано на рисунке 53. Предварительно вычисляем значения изгибающего момента M и поперечной силы Q в данном сечении (они показаны на эпюрах).

Вычисляем напряжения (нормальные и касательные) в этом поперечном сечении в точке установки тензометра (рис. 54):

$$\sigma_x = \frac{M}{J_z} y = \frac{39\,000}{19\,062 \cdot 10^{-8}} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = -16{,}4 \text{ МПа}.$$

☞ *Обратите внимание:* все величины подставлялись по модулю, а знак минус у напряжения получен **по смыслу**, так как тензометр установлен в нижней части двутавра, а растянуты (видно по эпюре M) верхние волокна. (Эту особенность в определении знака нормальных напряжений иногда забывают и

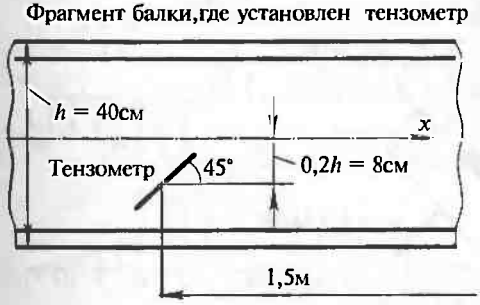


Рис. 53

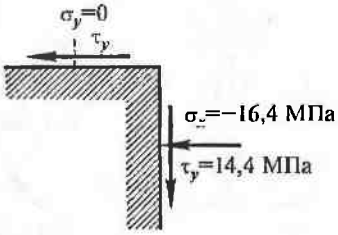


Рис. 54

стремятся определить знак непосредственно по формуле, подставляя M и y с учетом знака; но тогда нужно помнить, что ось y направляется вниз, как было при выводе формулы.)

$$\tau_y = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b} = \frac{44\,000 \cdot 518{,}44 \cdot 10^{-6}}{19\,062 \cdot 10^{-8} \cdot 0{,}83 \cdot 10^{-2}} = 14{,}4 \text{ МПа},$$

здесь $b = 0{,}83$ см — толщина стенки двутавра № 40; $S_z^{\text{отс}} = 518{,}44$ см^3 получен как разность $S_z^{\text{полус}}$ и S_z оставшейся части сечения от точки определения τ_y до оси z, т. е. $S^{\text{отс}} = 545 - 8 \cdot 0{,}83 \cdot 4 = 518{,}44$ см^3.

Напряжения в этой же точке, но на параллельных и перпендикулярных тензометру площадках ($\alpha = 45°$ и $135°$) равны (рис. 55):

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha - \tau_y \sin 2\alpha =$$
$$= (-16{,}4) \cdot 0{,}707^2 + 0 - 14{,}4 \cdot 1 = -22{,}6 \text{ МПа};$$
$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} \quad (\text{здесь } \sigma_y = 0),$$

откуда

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x - \sigma_{x_1} = -16{,}4 - (-22{,}6) = 6{,}2 \text{ МПа}.$$

Используя *обобщенный закон Гука*

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{\sigma_{x_1}}{E} - \mu \frac{\sigma_{y_1}}{E},$$

а также *формулу тензометра* $\varepsilon_{x_1} = \dfrac{\Delta A}{kl_т}$, получим

$$\Delta A = kl_т \left(\frac{\sigma_{x_1}}{E} - \mu \frac{\sigma_{y_1}}{E} \right) = 1000 \cdot 20 \cdot \left(\frac{-22{,}6}{2 \cdot 10^5} - 0{,}25 \frac{6{,}2}{2 \cdot 10^5} \right) = -2{,}41 \text{ мм}.$$

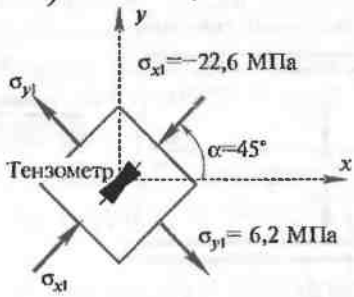


Рис. 55

6.4 СОСТАВНАЯ БАЛКА

Задача 33

Для сварной двутавровой балки заданы (рис. 56):

- размеры балки и поперечного сечения;
- нагрузка, выраженная через один параметр q;
- характеристики материала: $R = 210$ МПа; $R_{ср} = 130$ МПа; $R_{св} = 180$ МПа.

Требуется:

1) определить максимально допустимую нагрузку q;
2) проверить величину касательных напряжений;
3) построить эпюры σ и τ в опасных сечениях;
4) вычислить главные напряжения в характерных точках;
5) определить катет κ сварного шва.

Решение.

1) Определив опорные реакции, строим эпюры Q и M. Максимальное значение изгибающего момента $M_{max} = 1{,}5qa^2$.

Вычислим геометрические характеристики поперечного сечения балки — осевой момент инерции и момент сопротивления (рис. 57):

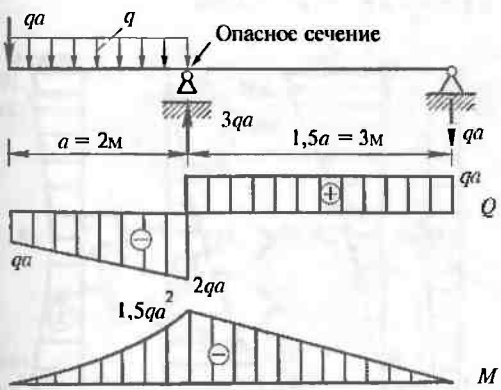


Рис. 56

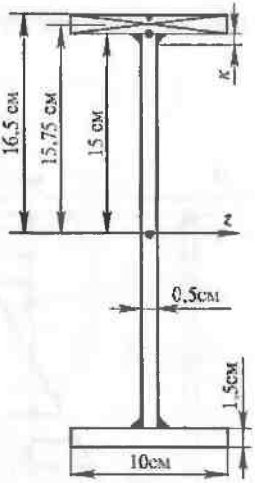


Рис. 57

$$J_z = \frac{0{,}5\cdot 30^3}{12} + 2\left(\frac{10\cdot 1{,}5^3}{12} + 15{,}75^2\cdot 15\right) = 8573 \text{ см}^4;$$

$$W_z = J_z/y_{max} = 8573/16{,}5 = 519{,}6 \text{ см}^3.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} < R$$

находим допустимую нагрузку

$$q \le W_z R/(1{,}5a^2) = 519{,}6\cdot 10^{-6}\cdot 210\cdot 10^6/(1{,}5\cdot 2^2) = 18\,200 \text{ Н/м} = 18{,}2 \text{ кН/м}.$$

Принимаем $q = 18$ кН/м и вычисляем значения Q и M в необходимых сечениях.

2) Для проверки касательных напряжений потребуется статический момент полусечения:

$$S_z^{полус} = 10\cdot 1{,}5\cdot 15{,}75 + 0{,}5\cdot 15\cdot 7{,}5 = 236{,}25 + 56{,}3 = 292{,}6 \text{ см}^3.$$

Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении, находящемся чуть левее подвижной опоры, будут равны:

$$\tau_{max} = Q_{max} S_z^{полус}/(J_z b) = 2\cdot 18\cdot 10^3\cdot 2\cdot 292{,}6\cdot 10^{-6}/(8573\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2}) = 49 \text{ МПа},$$

что меньше расчетного сопротивления на сдвиг (срез)

$$R_{ср} = 130 \text{ МПа}.$$

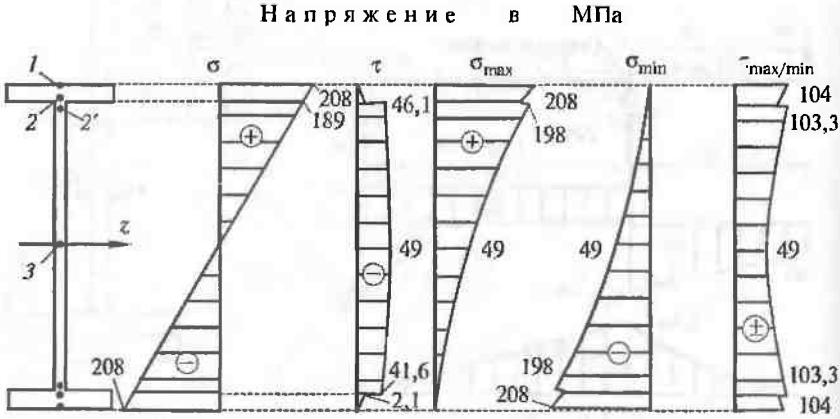


Рис. 18

3) Строим эпюры σ и τ (рис. 58) в опасном сечении ($Q = 72$ кН; $M = 108$ кН·м):

$$\sigma^{(1)} = \frac{10\,8000}{519{,}6\cdot 10^{-6}} = 208 \text{ МПа};$$

$$\sigma^{(2)} = \sigma^{(2')} = \frac{108\,000}{8573\cdot 10^{-8}}\cdot 15\cdot 10^{-2} = 189 \text{ МПа};$$

$$\tau^{(2')} = \frac{72\,000\cdot 247{,}5\cdot 10^{-6}}{8573\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2}} = 41{,}6 \text{ МПа};$$

$$\tau^{(2)} = \frac{72\,000\cdot 247{,}5\cdot 10^{-6}}{8573\cdot 10^{-8}\cdot 10\cdot 10^{-2}} = 2{,}1 \text{ МПа}.$$

4) Вычисляем главные напряжения в характерной точке *2′*:

$$\sigma^{(2')}_{\min/\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{189}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{189}{2}\right)^2 + (-41{,}6)^2} = 94{,}5 \pm 103{,}3;$$

$$\sigma^{(2')}_{\max} = 197{,}8 \text{ МПа} \approx 198 \text{ МПа}; \quad \sigma^{(2')}_{\min} = -8{,}8 \text{ МПа} \approx -9 \text{ МПа}.$$

Видно, что $\sigma < R$, в других точках — тем более.

Положение главных площадок, а также площадок с $\tau_{\max/\min}$ для точки *2′* можно проиллюстрировать рисунками (рис. 59, *а*) и кругом Мора (рис. 59, *б*):

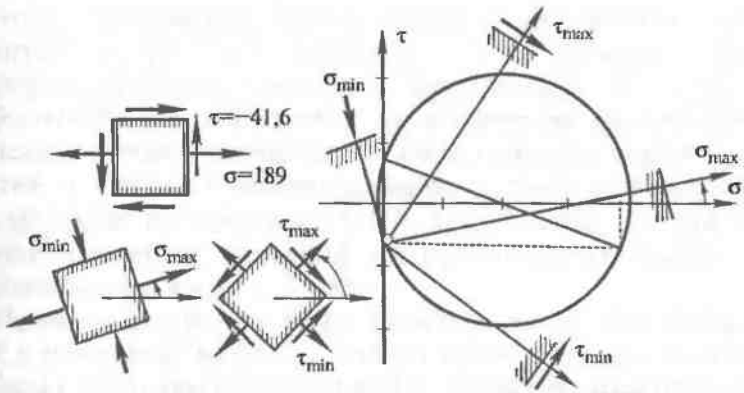


Рис. 59

5) Катет сварного шва определяем из условия прочности:

$$\tau_{шв}=T/A_{шв} \le R_{св},$$

где T — погонная сдвигающая сила, равная $Q_{max}S_z^{отс}/J_z$; $A_{шв}$ — площадь расчетного сечения шва, равная $2\cdot 0{,}7\kappa$ (два шва прикрепляют одну полку двутавра).

Тогда катет шва

$$\kappa \ge Q_{max}S_z^{отс}/(2\cdot 0{,}7\cdot J_z\cdot R_{св}) =$$

$$= 72\ 000\cdot 247{,}5\cdot 10^{-6}/(2\cdot 0{,}7\cdot 8573\cdot 10^{-8}\cdot 180\cdot 10^{-6}) =$$

$$= 8{,}3\cdot 10^{-4}\ \text{м} = 0{,}83\ \text{мм}.$$

7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БАЛОК

Основные понятия. Балка, нагруженная в главной плоскости, деформируется в этой же плоскости, причем ось балки из прямой линии переходит в плоскую кривую.

При изгибе балки ее сечения совершают перемещения двоякого рода: они поворачиваются (вокруг нейтральных осей) на углы θ и смещаются в направлении, перпендикулярном к недеформированной оси балки; эти смещения v называют *прогибами* (рис. 60).

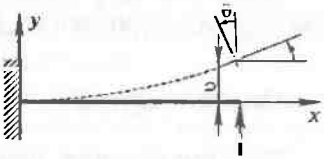


Рис. 60

Прогиб v считается ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ, если его направление совпадает с положительным направлением оси y (вверх), перпендикулярной к геометрической оси балки x. Угол поворота θ считается ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ, если поворот поперечного сечения (касательной к изогнутой оси) балки происходит против часовой стрелки.

Цели расчетов. Изучение перемещений балок важно *для расчета на жесткость*. В ряде случаев необходимо не только убедиться в прочности балки, но и сконструировать балку достаточно жесткой, подобрать необходимую величину EJ, чтобы обеспечить небольшую, не выходящую за допустимые пределы величину перемещений. Например, при расчете перекрытий в зданиях ставится требование, чтобы максимальный прогиб балок не превышал 1/150...1/400 длины пролета; при расчете пролетных строений железнодорожных мостов это требование еще выше — 1/1000.

Проверка жесткости балок особенно важна при *динамической и переменной нагрузках*: гибкие балки с малым значением EJ легко приходят в колебательное движение, раскачиваются. Иногда, наоборот, приходится делать тот или иной брус, работающий на изгиб, достаточно гибким, например, когда име-

ется ударная нагрузка: излишняя жесткость ведет к увеличению возникающих в брусе напряжений.

Определение перемещений имеет также исключительно большое значение *при расчетах статически неопределимых балок*.

Основные методы. Величины v и θ можно определять различными методами. Основные две группы:

1) определяются *законы изменения* функций $v(x)$ и $\theta(x)$ по длине балки (способ непосредственного интегрирования, метод начальных параметров — универсальная формула);

2) вычисляются значения этих величин *в конкретных сечениях* (метод единичных нагрузок — интеграл Мора).

Первая группа

Для вычисления перемещений по первой группе методов служит выражение, в котором кривизну заменяют приближенно второй производной от прогиба: $EJv'' = M(x)$. Такая приближенная замена вполне оправдывается чрезвычайной пологостью исследуемых кривых.

При последующем интегрировании дифференциального уравнения получают вначале уравнение углов поворота $\theta(x) = v'$ (первая производная v', численно равная тангенсу угла наклона касательной, ввиду пологости кривых принимается равной самому углу), а после вторичного интегрирования — уравнение прогибов $v(x)$.

Возникающие при интегрировании уравнения *постоянные интегрирования* определяют с помощью условий двух видов:

а) опорные условия;

б) условия плавности и непрерывности упругой линии на границах между силовыми участками.

При наличии нескольких участков применяют **метод начальных параметров** с использованием универсальной формулы

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \frac{m(x-a)^2}{2!} + \frac{P(x-b)^3}{3!} + \frac{q(x-c)^4}{4!}.$$

Здесь всегда всего лишь две постоянные интегрирования, а их значения (умноженные на EJ) очевидны: это прогиб v_0 и

угол поворота θ_0 того поперечного сечения балки, где расположено начало координат.

Универсальная формула предполагает СОБЛЮДЕНИЕ РЯДА ПРАВИЛ:

• если равномерно распределенная нагрузка q не доходит до сечения, в котором определяется перемещение, то ее продолжают до сечения, но добавляют такую же равномерно распределенную (компенсирующую) нагрузку противоположного знака на участке, где она отсутствует;

• начало координат располагают на левом конце балки. Тогда a, b и c — расстояния от начала координат до сечений, в которых, соответственно, приложены пары сил m, сосредоточенные силы (в том числе реактивные) P или начинается действие равномерно распределенных нагрузок q;

• каждое слагаемое принимают со знаком, соответствующим знаку изгибающего момента в сечении x от этого силового воздействия.

Два начальных параметра v_0 и θ_0 находят из следующих условий закрепления балки: а) в шарнирных опорах прогибы равны нулю; б) в заделке прогиб и угол поворота сечения равны нулю (рис. 61).

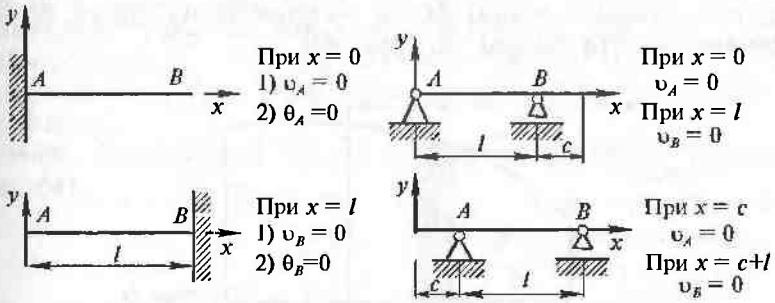


Рис. 61

Вторая группа

Метод единичных нагрузок — интеграл Максвелла–Мора — сводится, как правило, к «перемножению» двух эпюр изгибающих моментов: «грузовой» M_P (от заданной нагрузки) и «единичной» M_i (от нагрузки $i = 1$, приложенной по

направлению искомого перемещения). Выражение «перемножение эпюр» употребляется в известной степени условно взамен более общего выражения «вычисление интеграла Максвелла–Мора».

Если в результате вычисления величина $\Delta_{iP} = \int\limits_L \frac{M_i M_P}{EJ} dx$ окажется *положительной*, то направление перемещения *совпадает* с направлением действия единичной нагрузки, а отрицательной — то оно противоположно этому направлению.

Напомним смысл двухиндексовой системы обозначений:

- первый индекс (буква или номер) определяет точку и направление (т. е. «адрес»);
- второй — причину, вызвавшую искомое перемещение.

Во многих случаях при «перемножении» эпюр удобно применять

правило Верещагина:

$$\Delta_{iP} = \frac{\omega_P y_c}{EJ},$$

где ω_P — площадь эпюры M_P; y_c — ордината на эпюре M_i под центром тяжести эпюры M_P (рис. 62).

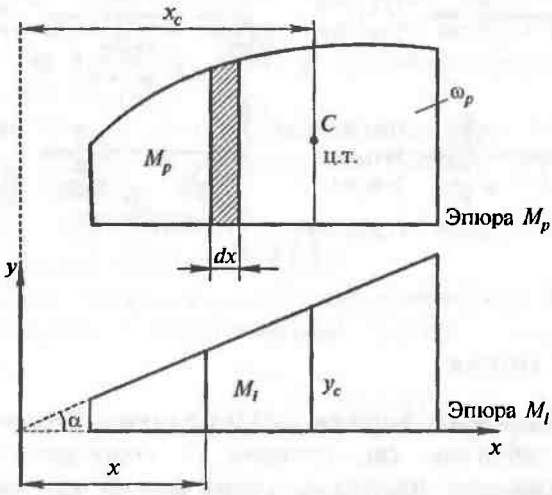


Рис. 62

Произведение $\omega_P y_c$ принимают положительным, если и площадь грузовой эпюры ω_P и соответствующая ей ордината единичной эпюры y_c находятся по одну сторону от оси балки, отрицательным, — если по разные стороны.

Сложные эпюры надо разбивать на простые, у которых известны площади и положения центров тяжести. Однако такой подход вызывает затруднения при расчетах, поэтому здесь лучше применять

правило Симпсона:

$$\Delta_{iP} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l}{6}(ac + 4he + bd).$$

Здесь l — длина участка; a, b, c, d — крайние, h, e — средние ординаты обеих эпюр. В простых случаях эта формула также применима, но она более громоздка.

Произведения ac, he, bd принимаются положительными, если обе парные ординаты находятся по одну сторону от оси балки, отрицательными, — если по разные стороны.

Формула Симпсона дает точный результат как для случая «сопряжения» двух прямолинейных эпюр (рис. 63, *а*), так и для случая «сопряжения» квадратной параболы с прямой (рис. 63, *б*). Напомним, что средние ординаты на прямолинейных участках эпюр легко находятся как полусуммы крайних ординат, а на криволинейных участках средние ординаты должны быть вычислены по уравнениям квадратной параболы.

Ниже в табличной форме приведены основные решения (рис. 64).

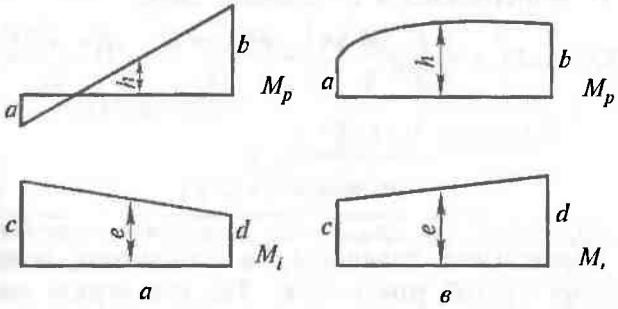


Рис. 63

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
(все значения даны *по модулю*)

F, A, l, B	$\upsilon_B = \frac{Fl^3}{3EJ}$ $\theta_B = \frac{Fl^2}{2EJ}$	F, A, C, B, $l/2$, $l/2$	$\upsilon_C = \frac{Fl^3}{48EJ}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{Fl^2}{16EJ}$
q, A, l, B	$\upsilon_B = \frac{ql^4}{8EJ}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{6EJ}$	A, q, B, C, l	$\upsilon_C = \frac{5ql^4}{384EJ}$ $\theta_A = \theta_B = \frac{ql^3}{24EJ}$
m, A, l, B	$\upsilon_B = \frac{ml^2}{2EJ}$ $\theta_B = \frac{ml}{EJ}$	m, A, B, l	$\theta_A = \frac{ml}{3EJ}$ $\theta_B = \frac{ml}{6EJ}$

Рис. 64

Задача 34

Написать уравнения прогибов балки и определить прогиб посередине пролета (рис. 65).

Решение. Очевидно, что реакция в левой опоре $R_A = \frac{F}{2} + \frac{ql}{8}$. Так как в начале координат прогиб равен нулю ($v_0 = 0$), то универсальное уравнение упругой линии для участков *I* и *II* записывается в следующем виде:

$$EJv = EJ\theta_0 x + \left(\frac{F}{2} + \frac{ql}{8}\right)\frac{x^3}{3!} - \frac{F(x - l/2)^3}{3!} - \frac{q(x - l/2)^4}{4!}.$$

I участок: $0 < x < l/2$.

II участок: $l/2 < x < l$.

Для определения величины θ_0 используем условие — на правой опоре прогиб равен нулю. Так как правая опора принадлежит участку *II*, то, подставляя $x = l$ в уравнение прогибов этого участка и приравнивая прогиб нулю, получаем

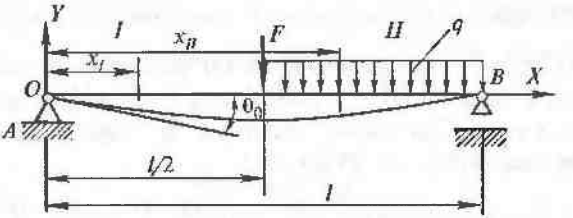


Рис. 65

$$EJv_{x=l} = EJ\theta_0 l + \left(\frac{F}{2} + \frac{ql}{8}\right)\frac{l^3}{6} - \frac{F(l-l/2)^3}{6} - \frac{q(l-l/2)^4}{24} = 0,$$

откуда

$$\theta_0 = -\frac{Fl^2}{16EJ} - \frac{7}{384}\frac{ql^3}{EJ}.$$

Уравнение упругой линии с учетом значения θ_0 принимает вид:

$$EJv = -\left(\frac{Fl^2}{16} + \frac{7ql^3}{384}\right)x + \left(\frac{F}{2} + \frac{ql}{8}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{F(x-l/2)^3}{6} - \frac{q(x-l/2)^4}{24}.$$

Найдем теперь прогиб посередине пролета. Положив $x = l/2$, получим

$$v_{x=l/2} = -\frac{Fl^3}{48EJ} - \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}.$$

Без учета распределенной нагрузки ($q = 0$), прогиб балки только от сосредоточенной силы в середине пролета

$$v_{max} = v_{x=l/2} = -\frac{Fl^3}{48EJ},$$

а угол поворота на опоре —

$$\theta_0 = -\frac{Fl^2}{16EJ}.$$

(Сравните полученные результаты с приведенными выше табличными данными.)

Задача 35

П о д о б р а т ь сечение балки по условию жесткости, если допускаемый прогиб $[f] = (1/200)l$, а $q = 20$ кН/м (рис. 66).

Р е ш е н и е. Составим, начиная с левого конца балки, выражение прогибов по участкам:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x - \frac{qx^4}{4!} + R_A \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{q(x-1)^4}{4!}.$$

I участок: $0 < x < 1$.

II участок: $1 < x < 3$.

В последнем слагаемом $q_ф = q$ — интенсивность фиктивной распределенной нагрузки обратного знака, добавленной из-за продления действующей нагрузки от точки *A* до рассматриваемого сечения на втором участке.

Граничные условия для данной схемы:

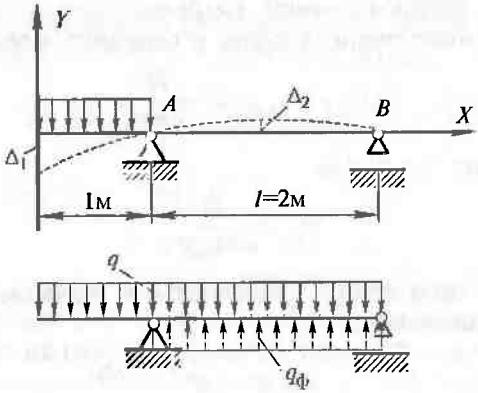
при $x = 1$ м $\quad v_A = 0$;

при $x = 3$ м $\quad v_B = 0$.

Запишем их в развернутом виде:

$$EJv_{x=1} = EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot 1 - \frac{20 \cdot 1^4}{24} = 0;$$

$$EJv_{x=3} = EJv_0 + EJ\theta_0 \cdot 3 - \frac{20 \cdot 3^4}{24} + R_A \frac{(3-1)^3}{6} + \frac{20 \cdot (3-1)^4}{24} = 0.$$



Р и с. 56

Подставляя найденную из условия равновесия $\sum M_B = 0$; $q \cdot 1 \cdot 2{,}5 - R_A \cdot 2 = 0$ левую опорную реакцию $R_A = 20 \cdot 1 \cdot 2{,}5/2 = 25$ кН, получим

$$v_0 + \theta_0 = \frac{5}{6EJ};$$

$$v_0 + 3\theta_0 = \frac{125}{6EJ}.$$

Решая совместно эти два уравнения, получим

$$\theta_0 = \frac{10}{EJ};$$

$$v_0 = \frac{55}{6EJ} = \frac{9{,}17}{EJ}.$$

Окончательно получим

$$EJv = -9{,}17 + 10x - \frac{20x^4}{24} + 25\frac{(x-1)^3}{6} + \frac{20(x-1)^4}{24}$$

или

$$v = \frac{1}{EJ}\left(-9{,}17 + 10x - \frac{5x^4}{6} + \frac{25(x-1)^3}{6} + \frac{5(x-1)^4}{6}\right).$$

Экстремальный прогиб возможен на свободном конце балки при $x_0 = 0$ и посередине между опорами при $x = 2$ м (принимаем приближенно, поскольку определить точную координату точки экстремума в пролете затруднительно).

С учетом сказанного,

$$\Delta_1 = v_{x=0} = -\frac{9{,}17}{EJ},$$

$$\Delta_2 = v_{x=2} = \frac{1}{EJ}\left(-9{,}17 + 10 \cdot 2 - \frac{5 \cdot 2^4}{6} + \frac{25(2-1)^3}{6} + \frac{5(2-1)^4}{6}\right) = \frac{2{,}5}{EJ}.$$

Наибольшее значение по абсолютной величине:

$$v_{\max} = \frac{9{,}17}{EJ} \le [f], \text{ где } [f] = \frac{l}{200} = \frac{2}{200} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Отсюда получим необходимый момент инерции

$$J > \frac{9{,}17\cdot 10^3}{2\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-2}} = 459\cdot 10^{-8}\ \text{м}^4 = 459\ \text{см}^4.$$

По сортаменту ГОСТ 8239–89 принимаем ближайший двутавр № 14 с характеристиками: $J_z = 572$ см^4, $W_z = 81{,}7$ см^3.

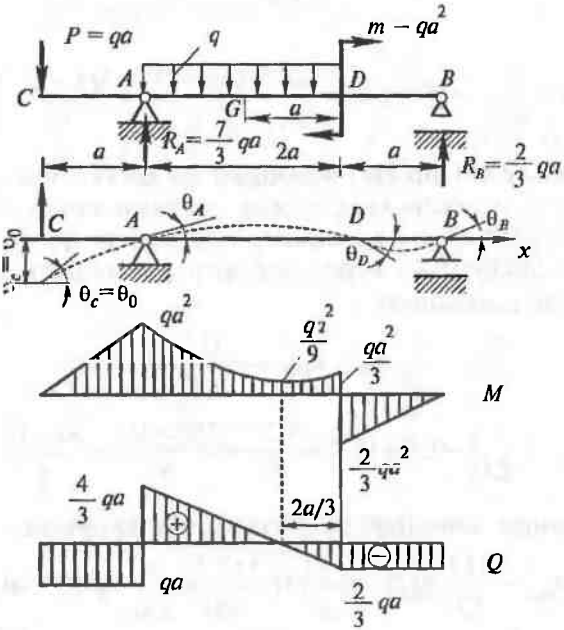
Кстати, условие прочности (проверим для корректности) выполняется:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{20\cdot 10^3\cdot 1\cdot 0{,}5}{81{,}7\cdot 10^{-5}} = 122\ \text{МПа} \le R = 210\ \text{МПа}.$$

Задача 36

Н а п и с а т ь уравнения для прогибов и углов поворота поперечных сечений балки (рис. 67) и найти прогибы и углы поворота указанных сечений ($q = 10$ кН/м; $a = 3$ м; $E - 2\cdot 10^5$ МПа; балка двутавровая №27, $J = 5010$ см^4).

Р е ш е н и е. Из уравнений равновесия находим опорные реакции.



Р и с. 67

Воспользуемся методом начальных параметров. Уравнения изогнутой оси на *I*, *II* и *III* участках, записанные с помощью универсальной формулы, имеют вид:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x - \frac{Px^3}{3!} + \frac{R_A(x-a)^3}{3!} - \frac{q(x-a)^4}{4!} + \frac{q(x-3a)^4}{4!} + \frac{m(x-3a)^2}{2!}.$$

I участок: $0 < x \le a$.

II участок: $a < x < 3a$.

III участок: $3a < x < 4a$.

По условиям закрепления балки (отсутствие прогиба v в точках A и B):

на левой опоре

$$EJv_A = EJv_0 + EJ\theta_0 a - \frac{qa \cdot a^3}{6} = 0;$$

на правой опоре

$$EJv_B = EJv_0 + EJ\theta_0 4a - \frac{qa(4a)^3}{6} + \frac{7/3\,qa(3a)^3}{6} - \frac{q(3a)^4}{24} + \frac{q(a)^4}{24} + \frac{qa^2(a)^2}{2} = 0,$$

т. е.

$$\begin{cases} EJv_0 + EJ\theta_0 a - \dfrac{qa^4}{6} = 0, \\ EJv_0 + EJ\theta_0 4a - 3qa^4 = 0, \end{cases}$$

откуда $v_0 = -\dfrac{7aa^4}{9EJ}$; $\theta_0 = \dfrac{17aa^3}{18EJ}$.

Тогда уравнение *прогибов* v любого сечения любого участка приобретает вид:

$$EJv = -\frac{7}{9}qa^4 + \frac{17}{18}qa^3 x - \underset{0<x<a}{\frac{qa \cdot x^3}{6}} + \underset{a<x<3a}{\frac{7qa(x-a)^3}{3 \cdot 6} - \frac{q(x-a)^4}{24}} + \underset{3a<x<4a}{\frac{q(x-3a)^4}{24} + \frac{qa^2(x-3a)^2}{2}}.$$

Для получения уравнения *углов поворота* дифференцируем один раз полученное уравнение изогнутой оси:

$$EJ\theta = \frac{17}{18}qa^3 - \underset{0<x<a}{\frac{qa \cdot x^2}{2}} + \underset{a<x<3a}{\frac{7qa(x-a)^2}{2} - \frac{q(x-a)^3}{6}} + \underset{3a<x<4a}{\frac{q(x-3a)^3}{6} + qa^2(x-3a)}.$$

Перемещения в заданных точках вычисляем по полученным формулам. Так, например, угол поворота сечения над левой опорой (при $x = a$)

$$\theta_A = \theta_{x=a} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{17}{18}qa^3 - \frac{qa^2}{2}\right) = \frac{4qa^3}{9EJ};$$

угол поворота сечения над правой опорой

$$\theta_B = \theta_{x=4a} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{17}{18}qa^3 - \frac{qa(4a)^2}{2} + \frac{7qa(3a)^2}{6} - \frac{q(3a)^3}{6} + \frac{qa^3}{6} + qa^2a\right) = \frac{qa^3}{9EJ};$$

угол поворота сечения, в котором приложен сосредоточенный момент,

$$\theta_D = \theta_{x=3a} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{17}{18}qa^3 - \frac{qa(3a)^2}{2} + \frac{7qa(2a)^2}{6} - \frac{q(2a)^3}{6}\right) = -\frac{2qa^3}{9EJ}.$$

Прогибы балки в сечениях G и D определяются так:

$$v_G = v_{x=2a} = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{7}{9}qa^4 + \frac{17}{18}qa^3 2a - \frac{qa(2a)^3}{6} + \frac{7qa\cdot a^3}{18} - \frac{qa^4}{24}\right) = \frac{qa^4}{8EJ};$$

$$v_D = v_{x=3a} = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{7}{9}qa^4 + \frac{17}{18}qa^3 3a - \frac{qa(3a)^3}{6} + \frac{7qa(2a)^3}{18} - \frac{q(2a)^4}{24}\right) = 0.$$

Подставляя заданные значения, получаем

$$v_C = v_0 = -\frac{7\cdot 10000\cdot 3^4}{9\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 5010\cdot 10^{-8}} = -6{,}29\cdot 10^{-2}\ \text{м} = -6{,}29\ \text{см};$$

$$v_G = -1{,}0\ \text{см};$$

$$\theta_C = \theta_0 = \frac{17\cdot 10000\cdot 3^3}{18\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 5010\cdot 10^{-8}} = 0{,}0255\ \text{рад};$$

$$\theta_A = 0{,}0120\ \text{рад};\ \theta_D = -0{,}0060\ \text{рад};\ \theta_B = 0{,}0030\ \text{рад}.$$

На рисунке 67 показаны примерный вид *упругой линии* балки (штриховая линия), найденные прогибы и углы поворота сечений. Следует иметь в виду, что в тех сечениях балки, в которых изгибающий момент равен нулю (см. эпюру M), на упругой линии должна быть точка перегиба. На участках балки, где изгибающий момент положителен, выпуклость упругой линии направлена вниз, а где отрицателен — вверх.

* * *

Начало координат можно было бы принять в точке B и направить ось x влево. Тогда бы не требовалось решать систему двух уравнений, так как $v_0 = v_B = 0$, а θ_0 можно найти из условия $v_A = 0$. Но при этом изменится правило знаков для θ.

Задача 37

Требуется определить прогиб и угол поворота свободного конца консольной балки постоянного сечения (рис. 68).

Решение. Записываем уравнение моментов и строим грузовую эпюру M_P от заданной нагрузки

$$M_P = M_{\bar{x}} = -\frac{qx^2}{2} \qquad 0 < x \le l.$$

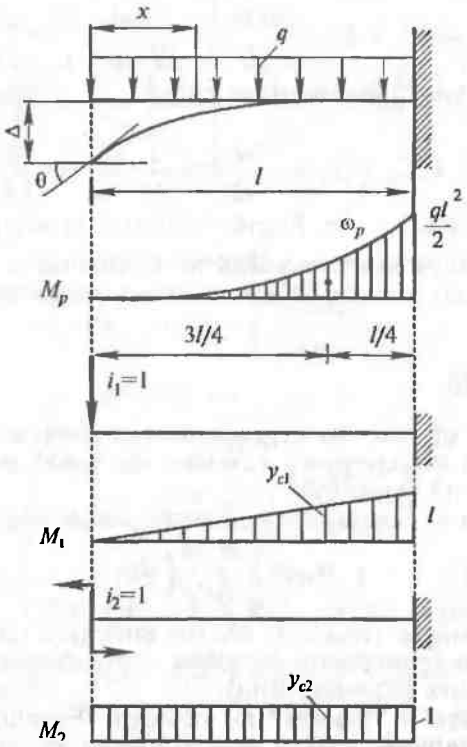


Рис. 68

Прикладываем к балке силу $i_1 = 1$ в сечении, где определяем прогиб. Запишем уравнение моментов $M_1 = -1 \cdot x$ и строим единичную эпюру M_1.

Для определения второго перемещения — угла поворота — прикладываем момент $i_2 = 1$ и строим единичную эпюру M_2.

Для вычисления прогибов методом Максвелла–Мора используем формулу Верещагина. Площадь эпюры M_P равна:

$$\omega_P = \frac{1}{3}\frac{ql^2}{2} l = \frac{ql^3}{6},$$

а расстояние до центра тяжести от вершины параболы $\frac{3}{4}l$.

Вычислим ординаты y_C на единичных эпюрах (ординаты взять под центром тяжести грузовой эпюры)

$$y_{C_1} = \frac{3}{4}l, \; y_{C_2} = 1.$$

Тогда прогиб концевого сечения равен

$$\Delta = \Delta_{1P} = \Delta_{1q} = \frac{\omega_P y_{C_1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{6} \cdot \frac{3}{4} l = \frac{ql^4}{8EJ}$$

(по направлению приложенной силы i_1, т. е. вниз), а угол поворота

$$\Delta = \Delta_{2P} = \Delta_{2q} = \frac{\omega_P y_{C_2}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{ql^3}{6} \cdot 1 = \frac{ql^3}{6EJ}$$

(по направлению i_2, т. е. против часовой стрелки).

☞ При перемножении площадь ω_P и ординаты y_C находились по одну сторону от оси балки, поэтому результат взят со знаком «плюс».

Задача 38

Для балки ступенчато переменного сечения определить угол поворота поперечного сечения на левой опоре и максимальный прогиб (рис. 69).

Решение. Воспользуемся интегралом Максвелла–Мора:

$$\Delta_{iP} = \int_L \frac{M_i M_P}{EJ(x)} dx.$$

Строим эпюры: грузовую M_P (от внешней нагрузки) и единичные M_i (от единичных нагрузок, приложенных по направлениям искомых перемещений).

«Перемножаем» эпюры по правилу Верещагина или по формуле Симпсона. (Здесь все вычисления проводились по правилу Верещагина.)

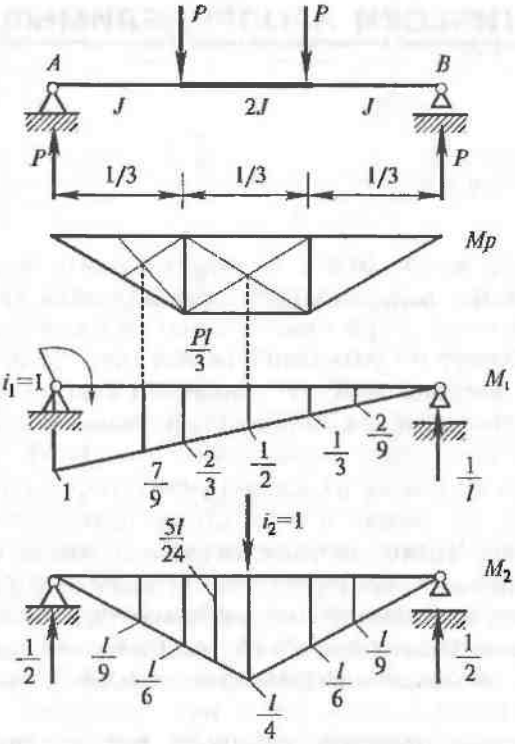


Рис. 69

$$\theta_A = \Delta_{i_1 P} = \Delta_{1P} = \int_L \frac{M_1 M_P}{EJ(x)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{EJ} + \frac{Pl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E \cdot 2J} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{Pl^2}{12EJ}.$$

$$v_{x=l/2} = \Delta_{i_2 P} = \Delta_{2P} = \int_L \frac{M_2 M_P}{EJ(x)} dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot P \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{EJ} + P \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{5}{24} l \cdot \frac{1}{E \cdot 2J} \right) = \frac{31Pl^3}{1296EJ}.$$

Интересно сопоставить эти решения с аналогичными, полученными для балки с $J = \text{const}$. В этом случае

$$\theta_A = \frac{Pl^2}{9EJ}; \quad v_{x=l/2} = \frac{23Pl^3}{648EJ}.$$

8 СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Расчет на изгиб балок с минимальным числом связей, обеспечивающих неподвижность прикрепления (в случае плоской системы сил — три связи), основан на определении всех реакций в связях из уравнений равновесия. Если балка имеет связи сверх необходимых, то уравнений статики уже недостаточно для однозначного определения реакций связей, но одновременно появляется возможность составить дополнительные уравнения, исходя из рассмотрения деформаций системы. Система, как мы знаем, в этом случае называется *статически неопределимой*. Число лишних связей, наложенных на балку сверх необходимых для неизменяемого прикрепления, называется *степенью статической неопределимости* балки. Напомним, что шарнирно-подвижная опора эквивалентна одному стержню (связи), шарнирно-неподвижная — двум, а заделка — трем стержням.

Итак, будем называть лишними все те связи, которые можно отбросить, не нарушая неизменяемости прикрепления: отбросив все лишние связи, получим статически определимую балку. Эту балку назовем *основной системой*.

Для одной и той же статически неопределимой балки (рис. 70) можно выбрать различные основные системы в зависимости от того, какие связи отброшены как лишние. Так как балка один раз статически неопределима, то для получения основной системы достаточно отбросить одну связь. На рисунке 70 также показана **недопустимая** система: здесь врезан шарнир над опорой — система стала *геометрически изменяемой* и осталась статически неопределимой.

Отбросив лишние связи, мы должны заменить их действие соответствующими усилиями, величина которых нам пока неизвестна. Вместо отброшенной подвижной опоры мы должны приложить неизвестную реакцию. Заменяя заделку на шарнирно-неподвижную опору, необходимо приложить неизвестный опорный момент.

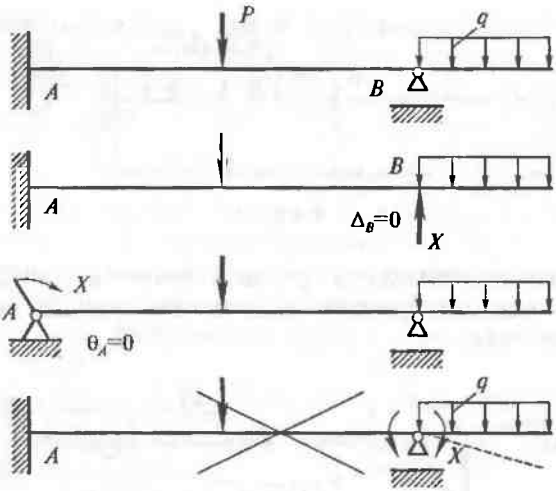


Рис. 70

Таким образом, основная система оказывается нагруженной заданными силами и неизвестными реакциями в отброшенных связях. Это *эквивалентная система*. Необходимо так выбрать величины неизвестных реакций в отброшенных связях, чтобы не допустить перемещения балки в направлении этих связей. Например, при отбрасывании подвижной опоры необходимо приравнять нулю прогиб, при отбрасывании заделки нужно обратить в нуль угол поворота балки в сечении заделки. Приравнивая нулю перемещения по направлению всех лишних связей, мы всегда получим необходимое число уравнений для определения неизвестных.

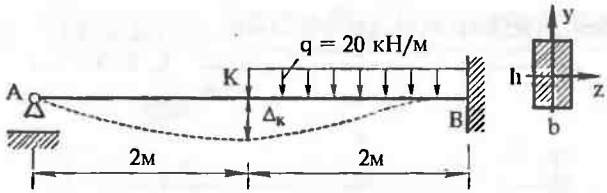
Последовательность расчетов и их проверку рассмотрим на примерах.

Задача 39

Для статически неопределимой балки постоянной жесткости (рис. 71) определить размеры прямоугольного сечения ($h/b = 3$), а также прогиб в точке K (принять $R = 10$ МПа; $E = 1 \cdot 10^4$ МПа).

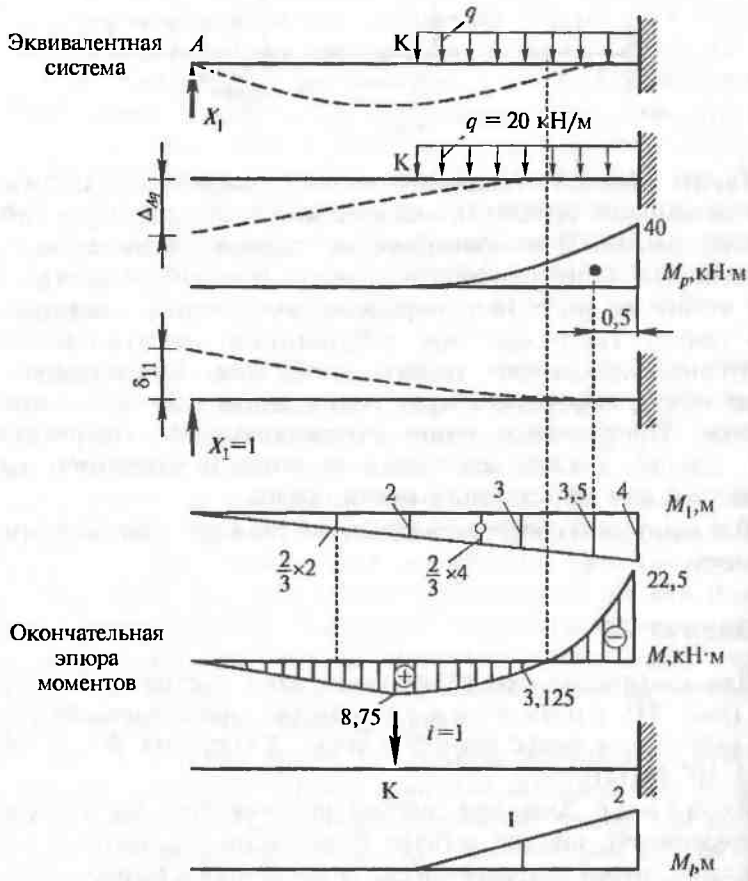
Решение. Заданная система является один раз статически неопределимой, так как в точке B наложены три связи и в точке A одна, итого — четыре связи, а уравнений статики — три.

Решаем задачу методом сил.



Р и с. 71

Принимая вертикальную связь в точке A за лишнюю, отбрасываем ее, прикладывая вместо нее неизвестную (пока) силу X_1 (рис. 72).



Р и с. 72

В основной системе, как и в заданной, перемещение точки A равно нулю. Это условие, будучи записано в аналитической форме, даст необходимое для решения задачи деформационное уравнение

$$\Delta_A = \Delta_{AX_1} + \Delta_{AP} = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Здесь δ_{11} — перемещение точки A в основной системе от единичной силы $X_1 - 1$, поэтому произведение $\delta_{11} X_1$ представляет собой перемещение точки A от неизвестной силы X_1, а Δ_{1P} — перемещение точки A, вызванное только внешней нагрузкой (P — это обобщенный индекс любой внешней нагрузки; здесь это q).

Для вычисления величин δ_{11} и Δ_{1P} применим метод Мора.

После построения эпюр — грузовой M_P и единичной M_1 — «перемножаем» их:

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 M_1}{EJ} dx = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} 4 \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{64}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M_1 M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 2 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{1}{EJ} = -\frac{280}{3EJ}.$$

Подставляем найденные значения в деформационное уравнение:

$$\frac{64}{3EJ} X_1 - \frac{280}{3EJ} = 0,$$

откуда $X_1 = 4{,}375$ кН.

После раскрытия статической неопределимости эпюры поперечных сил и изгибающих моментов строятся обычным способом.

Для контроля полученной эпюры M сделаем деформационную проверку (т. е. определим прогиб эквивалентной системы в сечении A), «перемножив» эпюры M_1 и M:

$$\Delta_A = \int \frac{M_1 M}{EJ} dx =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2} \cdot 8{,}75 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{2}{6} (8{,}75 \cdot 2 + 4 \cdot 3{,}125 \cdot 3 - 22{,}5 \cdot 4) \right\} \frac{1}{EJ} = 0.$$

Прогиб в сечении A эквивалентной системы равен нулю, что соответствует условию ее деформации; следовательно, задача решена правильно.

П о д б о р с е ч е н и я. Условие прочности при изгибе $\sigma = \dfrac{M_{max}}{W_z} \le R$.

Для прямоугольного сечения $W_z = \dfrac{bh^2}{6}$, а максимальное (по модулю) значение изгибающего момента $M_{max} = 22{,}5$ кН.

Учитывая, что $h = 3b$, получаем

$$\frac{M_{max}}{\frac{3}{2}b^3} \le R, \text{ откуда } b \ge \sqrt[3]{\frac{2M_{max}}{3R}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot 22500}{3\cdot 10\cdot 10^6}} = 11{,}5\cdot 10^{-2} \text{ м} = 11{,}5 \text{ см}.$$

Тогда $h = 3b = 34{,}5$ см, а $J_z = bh^3/12 = 11{,}5\cdot 34{,}5^3/12 = 39350$ см^4.

П р о г и б т о ч к и K также определяем с помощью метода единичной нагрузки: прикладываем ее в точке K по вертикали, строим (в ОСНОВНОЙ системе!) эпюру M_i и «перемножаем» ее С ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ эпюрой M:

$$v_K = \int \frac{M_i M}{EJ} dx = \frac{2}{6}(0 - 4\cdot 3{,}125\cdot 1 + 22{,}5\cdot 2) = \frac{65}{6EJ} =$$

$$= \frac{65\,000}{6\cdot 1\cdot 10^{10}\cdot 39\,350\cdot 10^{-8}} = 2{,}75\cdot 10^{-3} \text{ м} = 2{,}75 \text{ мм}$$

(по направлению $i = 1$, т. е. вниз).

Для изображения изогнутой оси балки надо учесть:

а) опорные условия — в заделке касательная к оси горизонтальна;

б) эпюру M, которая указывает, где упругая линия обращена выпуклостью книзу, а где — выпуклостью кверху. Упругая линия балки показана штриховой линией.

* * *

Для вычисления δ_{11} и Δ_{1P} можно применять другие способы или использовать табличные формулы (см. выше):

$$\delta_{11} = \frac{Fl^3}{3EJ} = \frac{1\cdot 4^3}{3EJ} = \frac{64}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \Delta_{Aq} = \Delta_{Kq} + \theta_{Kq}\cdot l_{AK} = \frac{q\cdot 2^4}{8EJ} + \frac{q\cdot 2^3}{6EJ}\cdot 2 = \frac{7\cdot 20\cdot 2^3}{12EJ} = \frac{280}{3EJ}.$$

Задача 40

Для балки постоянной жесткости ($EJ = \text{const}$) построить эпюры Q и M (рис. 73).

Решение. В задаче одна «лишняя связь», т. е. она один раз статически неопределима.

Выбираем основную систему. Для этого отбросим связь в точке B и по направлению отброшенной связи приложим неизвестную опорную реакцию X. К основной системе приложим заданную нагрузку q.

Запишем деформационное уравнение

$$v_B = 0 \text{ или } v_B = v_{BX} + v_{Bq} = 0.$$

Прогибы v_{Bq} и v_{BX} определим методом единичных нагрузок — методом Максвелла–Мора.

В этом случае деформационное уравнение запишем в виде

$$\delta_{11} X + \Delta_{1P} = 0,$$

где δ_{11} — единичный коэффициент или перемещение по направлению отброшенной связи, вызванное нагрузкой $i = 1$; Δ_{1P} — грузовой коэффициент или перемещение по направлению отброшенной связи, вызванное заданной нагрузкой q.

Для определения коэффициентов необходимо построить эпюры M_P (грузовая) и M_1 (единичная).

При вычислении коэффициентов δ_{11} и Δ_{1P} используем формулу Симпсона.

Вычислим δ_{11}, умножив единичную эпюру саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{4}{6EJ}(0\cdot 0 + 4\cdot 1{,}2\cdot 1{,}2 + 2{,}4\cdot 2{,}4) + \frac{6}{6EJ}(2{,}4\cdot 2{,}4 + 4\cdot 1{,}2\cdot 1{,}2 + 0\cdot 0) =$$

$$= \frac{2}{3EJ}\cdot 11{,}52 + \frac{1}{EJ}\cdot 11{,}52 = \frac{19{,}2}{EJ}.$$

Вычислим Δ_{1P}, перемножив единичную и грузовую эпюры:

$$\Delta_{1P} = \frac{4}{6EJ}(0\cdot 0 + 4\cdot 1{,}2\cdot 8 + 2{,}4\cdot 16) + \frac{6}{6EJ}(2{,}4\cdot 16 + 4\cdot 1{,}2\cdot 28 + 0\cdot 20) =$$

$$= \frac{2}{3EJ}\cdot 76{,}8 + \frac{1}{EJ}\cdot 172{,}8 = \frac{224}{EJ}.$$

Вычисленные коэффициенты подставим в деформационное уравнение.

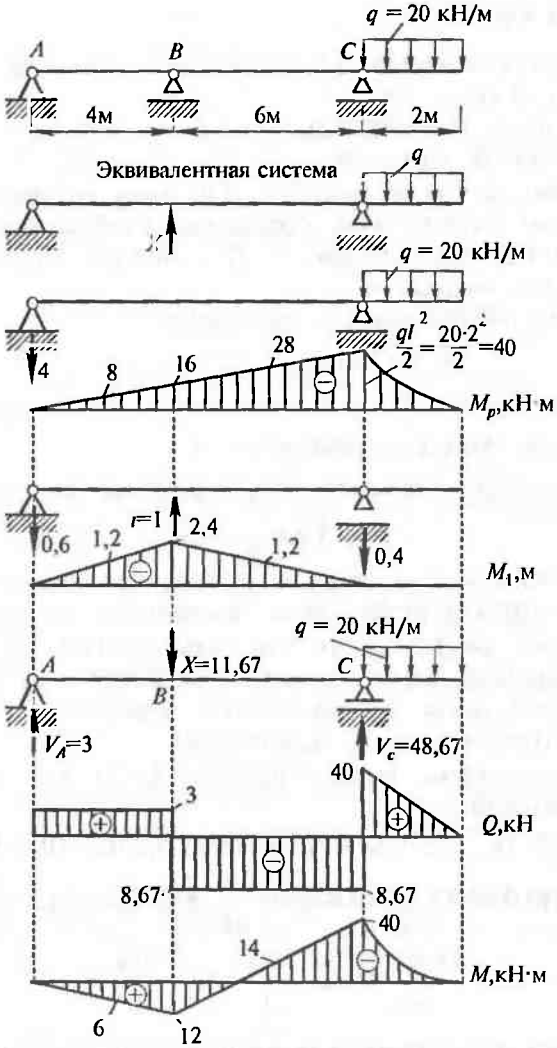


Рис. 73

$$\frac{19{,}2}{EJ}X+\frac{224}{EJ}=0.$$

Отсюда

$$X=-\frac{224}{19{,}2}=-11{,}67 \text{ кН (реакция направлена вниз).}$$

Определим опорные реакции в балке:

$$\sum m_A = 0,\ -11{,}67\cdot 4 + V_C\cdot 10 - 20\cdot 2\cdot 11 = 0;$$

$$V_C = \frac{11{,}67\cdot 4 + 20\cdot 22}{10} = \frac{46{,}7 + 440}{10} = 48{,}7 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0,\ -V_A\cdot 10 + 11{,}67\cdot 6 - 20\cdot 2\cdot 1 = 0;$$

$$V_A = \frac{11{,}67\cdot 6 - 40}{10} = \frac{30}{10} = 3 \text{ кН}.$$

Запишем уравнения и вычислим Q и M на каждом участке.

I участок: $0 \le x_1 \le 4$. $Q = V_A = 3$ кН.

$M = V_A x_1$, при $x_1 = 0$ $M = 0$,

$x_1 = 4$ $M = 12$ кН·м.

II участок: $0 < x_2 < 6$.

$Q = V_A - 11{,}67 = 3 - 11{,}67 = -8{,}67$ кН.

$M = V_A(4 + x_2) - X\cdot x_2$, при $x_2 = 0$ $M = 12$ кН·м,

$x_2 = 6$ $M = -40$ кН·м.

III участок: $0 \le x_3 \le 2$.

$Q = qx_3$. $M = -q\dfrac{x_3^2}{2}$. при $x_3 = 0$ $Q = 0$, $M = 0$,

$x_3 = 2$ $Q = 20\cdot 2 = 40$ кН,

$$M = -20\frac{2^2}{2} = -40 \text{ кН·м}.$$

Построим эпюры Q и M.

Выполним деформационную проверку, умножив окончательную эпюру M на единичную:

$$\frac{4}{6EJ}(0\cdot 0 - 4\cdot 1{,}2\cdot 6 - 2{,}4\cdot 12) + \frac{6}{6EJ}(-2{,}4\cdot 12 + 4\cdot 1{,}2\cdot 14 + 0\cdot 40) =$$

$$= \frac{-67{,}2 + 67{,}2}{EJ} = 0.$$

* * *

☝ Подчеркнем, что реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равнялись бы нулю — в этом смысл деформационной проверки. Действительно, в заданной системе не может

быть перемещений в направлениях имеющихся в ней абсолютно жестких связей, следовательно, и в эквивалентной системе перемещения в направлениях отброшенных связей, вызванные действием заданных сил и искомых лишних неизвестных, должны быть равны нулю.

☝ Деформационных проверок столько, какова степень статической неопределимости.

9 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В общем случае в поперечных сечениях стержня возникают внутренние усилия, включающие шесть силовых факторов: продольную и поперечные силы, крутящий и изгибающие моменты. Каждый из них предопределяет какой-либо один простейший вид деформации: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб.

Под сложным сопротивлением подразумевают различные *комбинации простейших деформаций*. Наибольший практический интерес представляют собой следующие сочетания видов деформаций:

- косой изгиб;
- растяжение (сжатие) с изгибом — внецентренное растяжение (сжатие);
- изгиб с кручением.

Задачи сложного сопротивления на основании *принципа независимости действия сил* решаются суммированием напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности. Следует иметь в виду, что принцип суммирования действия сил, или принцип суперпозиции, применим в тех случаях, когда деформации малы и материал подчиняется закону Гука.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Определяют общую картину *распределения внутренних усилий,* т. е. находят усилия в поперечных сечениях стержня, строят эпюры.

2. Находят положение наиболее *напряженного сечения*.

3. Вычисляют напряжения от каждого усилия в отдельности и, исследуя их распределение, находят *опасную точку*, в которой суммарные напряжения достигают наибольшей величины.

4. Проверяют выполнение *условия прочности* для материала стержня.

Полное нормальное напряжение в какой-либо точке поперечного сечения, например, при одновременном действии растяжения и изгиба в двух плоскостях, определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z,$$

где y, z — координаты точки в главных центральных осях.

ПРАВИЛО ЗНАКОВ

Продольная сила считается положительной, если она в рассматриваемом сечении вызывает растягивающие напряжения.

Изгибающие моменты принимаются положительными, если они в точках, принадлежащих положительному квадранту, вызывают растягивающие напряжения.

9.1 КОСОЙ ИЗГИБ

При косом изгибе внешние нагрузки не лежат в одной главной плоскости балки.

При расчете на косой изгиб находятся наиболее напряженные точки сечения и на основании принципа независимости действия сил подсчитываются напряжения в них от двух изгибающих моментов, действующих в главных плоскостях. На основании того же принципа независимости действия сил определяются и перемещения.

Общая формула для определения напряжений

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z$$

учитывает моменты инерции и расстояния от главных осей до точки, в которой определяется напряжение. В прямоугольных сечениях и сечениях, вписывающихся в прямоугольник (двутавр, швеллер), наиболее опасные напряжения возникают *в угловых точках*, поэтому расчет упрощается и напряжения могут быть вычислены с использованием моментов сопротивления:

$$\sigma = \pm\frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

Знаки определяются по смыслу, в зависимости от того, где находится точка: если в растянутой зоне, то плюс,
если в сжатой, то минус.

☝ При косом изгибе нейтральная ось сечения (нейтральная линия, нулевая линия) *не перпендикулярна* плоскости действия результирующего изгибающего момента, а *отклоняется к оси, относительно которой момент инерции минимален.*

☝ Вычислять положения нейтральной оси необходимо, главным образом, для сечений с криволинейным очертанием с целью определения координат точек, наиболее удаленных от нейтральной оси. Во многих случаях определение положения нулевой линии необязательно, и напряжения подсчитываются для тех точек, в которых наибольшее значение их очевидно. Например, для таврового сечения достаточно найти напряжения в трех точках, наиболее удаленных от предполагаемой нейтральной оси. Это проще, чем определять положение нейтральной оси и находить наиболее удаленные от нее точки.

☝ Определение размеров сечения (проектная задача) проводится методом последовательных приближений, причем для двутавров исходное отношение W_z/W_y можно принять 10, для швеллеров — 7.

☝ Если балка имеет поперечное сечение, у которого все центральные оси главные (квадратное, круглое, кольцевое), то в каждом поперечном сечении силовая линия и главные оси совпадают, поэтому для такой балки вообще не может быть косого изгиба.

Задача 41

Определить наибольшие по абсолютному значению нормальные напряжения, положение нейтральной оси в опасном сечении балки, а также прогиб сечения под силой, принимая $E = 2 \cdot 10^5$ МПа (рис. 74).

Решение. Сосредоточенная сила P приложена в центре тяжести поперечного сечения, находящегося на расстоянии y_c от нижней грани сечения:

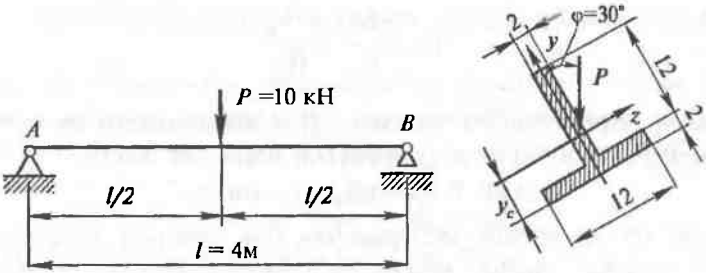


Рис. 74

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{24 \cdot 8 + 24 \cdot 1}{48} = 4{,}5 \text{ см}.$$

Вычислим главные центральные моменты инерции поперечного сечения балки:

$$J_z = \frac{2 \cdot 12^3}{12} + 24 \cdot 3{,}5^2 + \frac{12 \cdot 2^3}{12} + 24 \cdot 3{,}5^2 = 884 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{12 \cdot 2^3}{12} + \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 296 \text{ см}^4.$$

Рассмотрим теперь изгиб балки в двух главных плоскостях, предварительно спроецировав на них нагрузку (рис. 75).

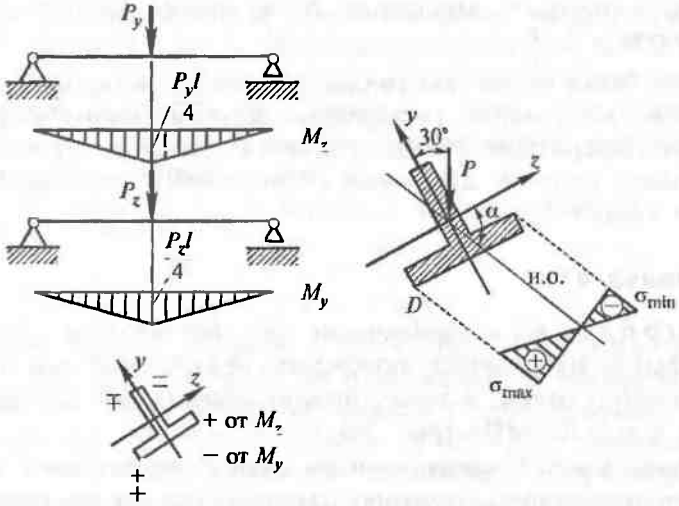


Рис. 75

Очевидно, что опасным (имеющим наибольшие изгибающие моменты) сечением балки будет сечение под силой, так как в балке на двух опорах, нагруженной посередине сосредоточенной силой, $M_{max} = Pl/4$. Однако знать изгибающие моменты и моменты инерции мало — требуется определить опасные точки сечения. Эти точки всегда наиболее удалены от нейтральной оси, положение которой пока неизвестно.

Вообще говоря, положение нейтральной оси в любом поперечном сечении можно определять по формуле $\mathrm{tg}\alpha = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}$, в нашем случае, очевидно, можно использовать иной вид этой формулы: $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\varphi \cdot \frac{J_z}{J_y}$. Тогда $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}30^\circ \cdot \frac{884}{296} = 1{,}72$, откуда $\alpha \approx 60^\circ$.

Проведем нейтральную ось в поперечном сечении, что позволит установить наиболее удаленную от нее точку. Координаты точки D, очевидно, таковы: $y_D = -4{,}5$ см; $z_D = -6$ см. Изгибающие моменты M_z и M_y также отрицательны, так как точки первого квадранта в обоих случаях испытывают сжатие:

$$M_z = -P_y l/4 = -10\cos 30^\circ \cdot 4/4 = -8{,}66 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = -P_z l/4 = -10\sin 30^\circ \cdot 4/4 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальные нормальные напряжения в точке D сечения под силой равны:

$$\sigma_{max} = \sigma_D = \frac{M_z}{J_z} y_D + \frac{M_y}{J_y} z_D =$$

$$= \frac{-8{,}66\cdot 10^3}{884\cdot 10^{-8}}(-4{,}5\cdot 10^{-2}) + \frac{-5\cdot 10^3}{296\cdot 10^{-8}}(-6\cdot 10^{-2}) = 145{,}5 \text{ МПа}.$$

Теперь определим перемещения, пользуясь также принципом независимости действия сил (рис. 76):

$$v = \frac{P\cos 30^\circ l^3}{48EJ_z} = \frac{10000\cdot(\sqrt{3}/2)\cdot 4^3}{48\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 884\cdot 10^{-8}} = 6{,}53\cdot 10^{-3} \text{ м} = 6{,}53 \text{ мм};$$

$$w = \frac{P\sin 30^\circ l^3}{48EJ_y} = \frac{10000\cdot(1/2)\cdot 4^3}{48\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 296\cdot 10^{-8}} = 11{,}26\cdot 10^{-3} \text{ м} = 11{,}26 \text{ мм}.$$

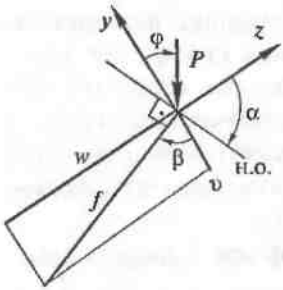


Рис. 76

Полное перемещение

$$f=\sqrt{v^2+w^2}=\sqrt{6{,}53^2+11{,}26^2}=13{,}0 \text{ мм}.$$

Определим направление полного перемещения или положение линии прогиба, т. е. угол β:

$$\mathrm{tg}\beta=w/v=11{,}26/6{,}53=1{,}72.$$

Естественно, что угол β равен углу α, что подтверждает перпендикулярность нейтральной оси и линии прогиба.

* * *

☝ При действии нескольких сил положение опасного сечения не всегда является очевидным, так как изгибающие моменты M_z и M_y, возникающие от действия различных нагрузок, часто не зависят друг от друга. В этих случаях необходимо проверять прочность в нескольких предположительно опасных сечениях.

☝ Прогиб любого сечения всегда равен геометрической сумме его прогибов в направлениях главных осей.

9.2 РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) С ИЗГИБОМ — ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ)

Для общего случая используют формулу

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M_z}{J_z}y+\frac{M_y}{J_y}z.$$

Так же, как и при косом изгибе, в брусе прямоугольного сечения или сечения, вписывающегося в прямоугольник, опасные точки находятся в углах сечения, и эта формула упрощается заменой моментов инерции и координат рассматриваемых точек сечения моментами сопротивления относительно главных осей:

$$\sigma=\frac{N}{A}+\frac{M_z}{W_z}+\frac{M_y}{W_y}.$$

Эта формула чаще применяется в практических расчетах. Здесь знак напряжения от каждого воздействия учитывается по смыслу.

☝ Проверка прочности при внецентренном сжатии хрупких материалов и большом эксцентриситете (нейтральная ось пересекает сечение) производится отдельно в сжатой и растянутой зонах по соответствующим расчетным сопротивлениям.

Ядро сечения. Это некоторая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложенная продольная растягивающая (сжимающая) сила вызывает *во всех точках сечения напряжения только одного знака*.

Если точка приложения силы находится на границе ядра сечения, то нейтральная ось *касается* контура сечения.

Чтобы получить очертание ядра сечения, необходимо рассмотреть положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные являются нейтральными осями, вычислить по формулам координаты граничных точек ядра относительно главных осей сечения. Соединяя затем эти точки, получим очертание ядра сечения (рис. 77).

При построении ядра сечения необходимо помнить, что:

• при повороте нейтральной линии вокруг какой-либо точки сечения точка приложения силы перемещается по прямой;

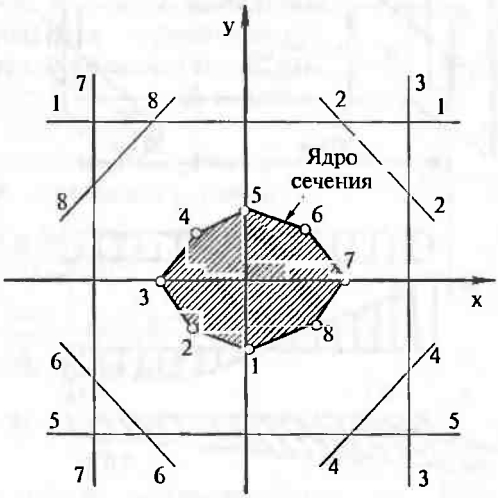


Рис. 77

• если нейтральная линия касательна к сечению и перпендикулярна одной из главных центральных осей инерции сечения, то точка приложения силы находится на этой оси, но по другую сторону от центра тяжести.

Задача 42

Определить величину наибольшей нагрузки P, приняв $R = 10$ МПа, и при растяжении, и при сжатии (рис. 78).

При найденном значении P построить для опасного сечения бруса эпюру нормальных напряжений.

Решение. Строим эпюры внутренних силовых факторов: N, M_z и M_y (эпюры M_z и M_y — на растянутых волокнах).

Опасным сечением является сечение у заделки — M_z и M_y имеют наибольшие значения, а N во всех сечениях одинакова.

Здесь $N = -P$;

$$M_z = P \cdot 0{,}7 - P \cdot 0{,}1 = 0{,}6P;$$

$$M_y = -P \cdot 1 - P \cdot 0{,}05 = -1{,}05P.$$

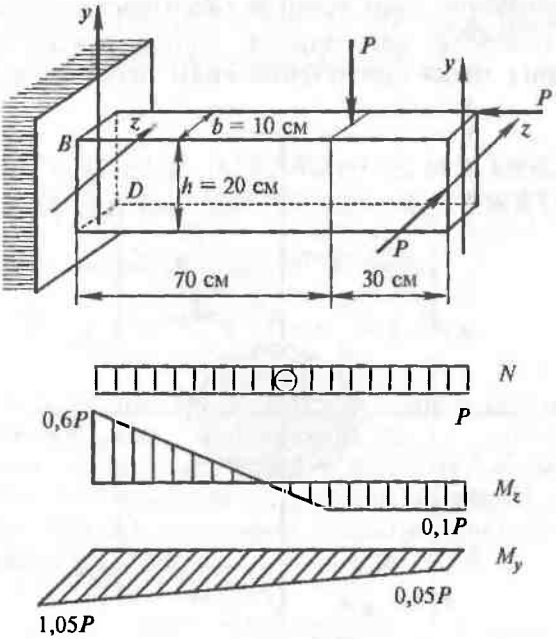


Рис. 78

Геометрические характеристики сечения:

площадь $A = 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$ м^2;

моменты сопротивления сечения

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2^2}{6} = 6{,}67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1^2}{6} = 3{,}33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Если проанализировать по физическому смыслу знаки нормальных напряжений в угловых точках сечения (рис. 79), возникающих от N, M_z и M_y, то нетрудно установить, что наиболее опасной будет точка D — здесь все слагаемые отрицательные. Запишем условие прочности для этой точки:

$$\frac{P}{0{,}02} + \frac{0{,}6P}{6{,}67 \cdot 10^{-4}} + \frac{1{,}05P}{3{,}33 \cdot 10^{-4}} < R,$$

откуда получим

$$P \le \frac{R}{4100} = \frac{10 \cdot 10^6}{4100} = 2{,}44 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2{,}44 \text{ кН}.$$

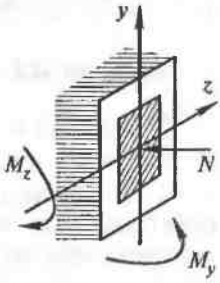


Рис. 79

Построим теперь для опасного сечения бруса эпюру нормальных напряжений (рис. 80). Естественно, что в точке D суммарное нормальное напряжение сжимающее и по модулю совпадает с расчетным сопротивлением, т. е. $|\sigma_D| = R = 10$ МПа.

В противоположной точке сечения, точке B, напряжение равно

$$\sigma_B = -\frac{2440}{0{,}02} + \frac{0{,}6 \cdot 2440}{6{,}67 \cdot 10^{-4}} + \frac{1{,}05 \cdot 2440}{3{,}33 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= (-0{,}12 + 2{,}20 + 7{,}68) \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 9{,}76 \text{ МПа}.$$

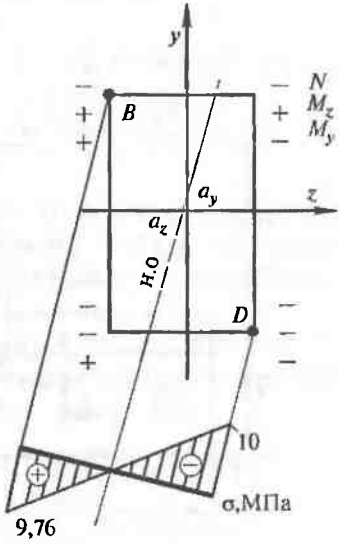


Рис. 80

* * *

Если расчетные сопротивления материала стержня на растяжение и

на сжатие различные, то условия прочности записываются для двух крайних наиболее напряженных точек.

☝ Если сечение не имеет четко выраженных наиболее удаленных от нейтральной оси точек (тавр и т. п.), то вначале следует определить положение этой оси:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p};\ a_y = -\frac{i_z^2}{y_p},$$

где a_z и a_y — отрезки, отсекаемые нейтральной осью на координатных осях; i — осевые радиусы инерции сечения, $i^2 = J/A$; $y_p = M_z/N$; $z_p = M_y/N$.

Задача 43

Построить ядро сечения (рис. 81).

Решение.

1. Разбиваем фигуру на два прямоугольника и определяем расстояние до центра тяжести сечения (имея в виду его симметричность) от нижней кромки:

$$A_1 = 45 \cdot 180 = 8100\ \text{см}^2;\ A_2 = 47 \cdot 40 = 1880\ \text{см}^2;$$

$$A = A_1 + A_2 = 8100 + 1880 = 9980\ \text{см}^2;$$

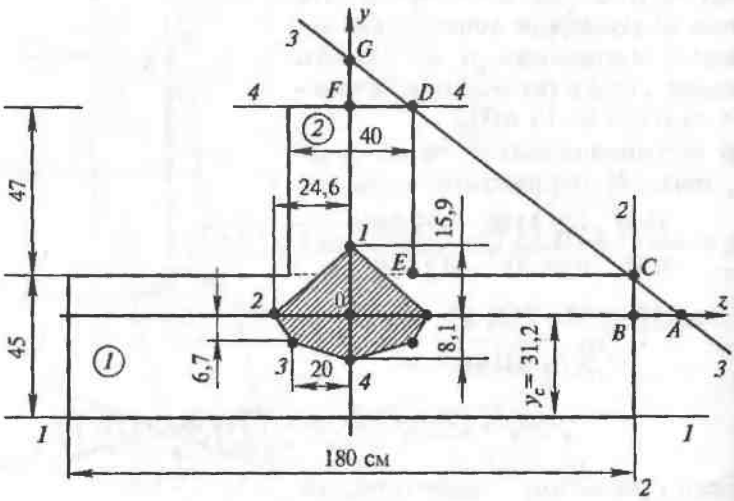


Рис. 81

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A} = \frac{8100 \cdot 22{,}5 + 1880 \cdot (45 + 23{,}5)}{9980} = 31{,}2 \text{ см}.$$

2. Вычисляем геометрические характеристики сечения (моменты инерции и квадраты радиусов инерции) относительно главных осей инерции:

$$J_z = \frac{180 \cdot 45^3}{12} + 8100 \cdot (31{,}2 - 22{,}5)^2 + \frac{40 \cdot 47^3}{12} + 1880 \cdot (23{,}5 + 13{,}8)^2 =$$

$$= 494{,}2 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{45 \cdot 180^3}{12} + \frac{47 \cdot 40^3}{12} = 2212 \cdot 10^4 \text{ см}^4;$$

$$i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{494{,}2 \cdot 10^4}{9980} = 495 \text{ см}^2;$$

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{2212 \cdot 10^4}{9980} = 2216 \text{ см}^2.$$

3. Проводим касательную *1–1* к контуру поперечного сечения и определяем значения отрезков, отсекаемых этой касательной на главных центральных осях инерции, а затем и координаты точки приложения продольной силы (силовой точки *1*):

$a_y = -31{,}2$ см; $a_z = \infty$ (так как прямая *1–1* параллельна оси z);

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{495}{-31{,}2} = 15{,}9 \text{ см}; \quad z_1 = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2216}{\infty} = 0.$$

Итак, имеем координаты силовой точки *1*, находящейся на контуре ядра сечения. Другими словами, если в этой точке приложить продольную силу, то нейтральная ось пройдет по линии *1–1*.

4. Проводим касательную *2–2* к контуру поперечного сечения и аналогичным образом вычисляем координаты точки приложения продольной силы (силовой точки *2*):

$a_y - \infty$ (прямая *2–2* параллельна оси y); $a_z = 90$ см;

$$y_2 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{495}{\infty} = 0; \quad z_2 = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2216}{90} = -24{,}6 \text{ см}.$$

5. Проводим касательную *3–3* к контуру поперечного сечения. Отрезки, отсекаемые этой прямой на осях z и y, определяем геометрически.

Очевидно, что $DE.EC$ как $GF.FD$, т. е. $\frac{47}{70}=\frac{GF}{20}$, откуда $GF = 13{,}4$ см.

Тогда $a_y = GO = GF + FO = 13{,}4 + 60{,}8 = 74{,}2$ см.

Из подобия DEC и CBA, т. е. $\frac{47}{70}=\frac{13{,}8}{AB}$, находим $AB = 20{,}6$ см.

Тогда $a_z = AO = BO + AB = 90 + 20{,}6 = 110{,}6$ см.

Теперь вычисляем координаты силовой точки *3*:

$$y_3 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{495}{74{,}2} = -6{,}7 \text{ см}; \quad z_3 = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2216}{110{,}6} = -20{,}0 \text{ см}.$$

6. И наконец, проводим касательную *4–4* к контуру поперечного сечения и вычисляем координаты силовой точки *4*:

$$y_4 = -\frac{i_z^2}{a_y} = -\frac{495}{60{,}8} = -8{,}1 \text{ см}; \quad z_4 = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{2216}{\infty} = 0.$$

7. Устанавливая две оставшиеся точки по симметрии и соединяя их прямыми, получим очертание ядра сечения.

* * *

☝ Минимальное количество касательных в виде нейтральных осей, которые необходимо проводить для определения контура ядра, определяется конкретной формой поперечного сечения стержня.

☝ Ядро сечения всегда является выпуклой фигурой.

☝ Если продольная сила будет приложена в одной из угловых точек поперечного сечения, то нейтральная ось пройдет через один из отрезков контура ядра сечения (здесь, например, от силы в точке D нейтральная ось пройдет через отрезок *3–4*).

9.3 ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

При изгибе с кручением к р у г л о г о стержня материал в районе опасной точки находится в плоском напряженном состоянии. При этом проверка прочности производится с помощью одной из теорий прочности по формуле

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{экв}}{W_{н.о}} < R \text{ (или } [\sigma]),$$

где $M_{экв}$ — расчетный эквивалентный момент; $W_{н.о}$ — осевой момент сопротивления сечения, равный для круглого сечения $\pi d^3/32$.

По *третьей теории прочности* (критерий — наибольшие касательные напряжения)

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{M_и^2 + M_{кр}^2}.$$

По *четвертой теории прочности* (критерий — энергия изменения формы)

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75 M_{кр}^2}.$$

Здесь $M_и = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ — суммарный изгибающий момент.

Опасные сечения определяют путем *сопоставления эпюр* изгибающих моментов M_z и M_y и крутящего момента $M_{кр}$. Опасными являются те сечения, где $M_и$ и $M_{кр}$ одновременно достигают наибольших значений.

Расчет бруса круглого поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения производится на плоский изгиб, но в расчетной формуле роль изгибающего момента играет эквивалентный момент.

При расчете стержней н е к р у г л о г о сечения эквивалентные напряжения следует определять непосредственно через σ и τ в опасных точках. Но поскольку точки с наибольшими касательными напряжениями от кручения могут не совпадать с точками, в которых возникнут наибольшие нормальные напряжения от изгиба, опасными окажутся те точки, в которых эквивалентное напряжение достигнет наибольшего значения.

Задача 44

О п р е д е л и т ь диаметр сечения ломаного стержня из расчета по третьей теории прочности, приняв $R = 210$ МПа (рис. 82).

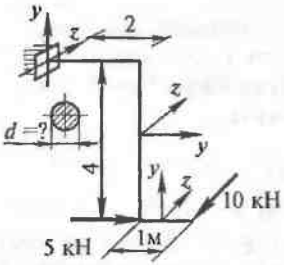


Рис. 82

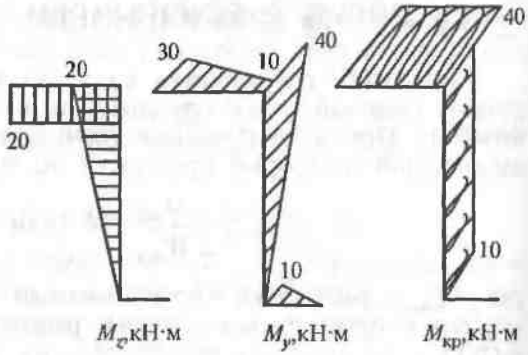


Рис. 83

Решение. Прежде всего следует построить эпюры изгибающих и крутящих моментов (влияние продольной и поперечных сил на σ и τ в поперечных сечениях не учитываем ввиду их малости по сравнению с $\sigma_{изг}$ и $\tau_{кр}$).

Эпюры изгибающих моментов M_z и M_y строим на растянутых волокнах (без учета знаков), вычисляя в конкретных сечениях значения изгибающих моментов. При этом удобнее внутренние усилия вычислять от сил со стороны свободного конца стержня (не определяя опорных реакций). Ординаты эпюры крутящих моментов $M_{кр}$ можно откладывать в произвольном направлении от оси стержня (рис. 83).

Из эпюр видно, что опасным будет сечение в заделке, где $M_z = 20$ кН·м и $M_y = 30$ кН·м.

Тогда $M_и = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{20^2 + 30^2} = 36{,}1$ кН·м.

Эквивалентный момент по третьей теории прочности равен

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{M_и^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{36{,}1^2 + 40^2} = 53{,}9 \text{ кН·м}.$$

Для круглого сплошного поперечного сечения условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{экв}}{W_{н.о}} = \frac{M_{экв}}{\pi d^3/32} \le R,$$

откуда $d \ge \sqrt[3]{\dfrac{32 M_{экв}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\dfrac{32 \cdot 53900}{3{,}14 \cdot 210 \cdot 10^6}} = 13{,}7 \cdot 10^{-2}$ м = 13,7 см.

10 УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

При центральном сжатии прямого стержня силой P его прямолинейная форма равновесия является устойчивой, пока сила не достигает так называемого *критического* значения. Превышение ее значения влечет за собой изгиб (выпучивание) стержня.

Формула Эйлера. Значение критической силы, соответствующее переходу сжатого элемента из устойчивого состояния равновесия в неустойчивое, находят по формуле Эйлера, которую с учетом различных случаев закрепления концов сжатого стержня можно записать в виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2},$$

где μ — коэффициент приведения длины стержня, принимаемый в зависимости от характера закрепления концов стержня (рис. 84).

Критическая сила зависит от геометрических размеров стержня и модуля упругости материала, но не зависит от прочностных характеристик материала, из которого изготовлен стержень.

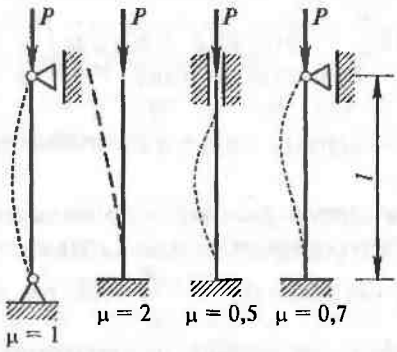


Рис. 84

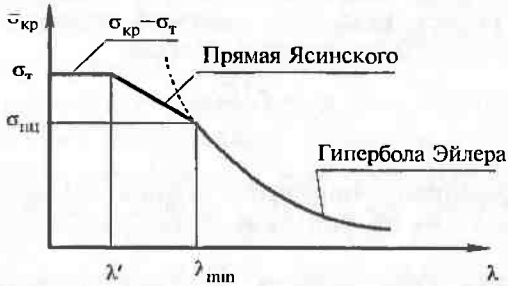
Критическое напряжение. Формула Эйлера справедлива в предположении пропорциональной работы материала стержня, характеризуемой законом Гука. Поэтому она может быть использована только тогда, когда *критическое напряжение* в материале *не превышает предела пропорциональности,* т. е.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{пц},$$

где $\lambda = \mu l/i$ — гибкость стержня; i — минимальный радиус инерции сечения.

Отсюда $\lambda > \lambda_{min} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$ (для Ст3 $\lambda_{min} \approx 100$).

☝ Формула Эйлера справедлива только при $\lambda \ge \lambda_{min}$, т. е. для стержней б о л ь ш о й гибкости (рис. 85).



Р и с. 85

☝ При $\lambda < \lambda_{min}$ формула Эйлера НЕПРИМЕНИМА, поэтому принимают:

если $\lambda' \le \lambda \le \lambda_{min}$ — стержни с р е д н е й гибкости: $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ [прямая Ясинского] (для Ст3 $a = 310$ МПа; $b = 1{,}14$ МПа);

если $\lambda < \lambda'$ — стержни м а л о й гибкости: $\sigma_{кр} = \sigma_т$ (для Ст3 $\lambda' \approx 40$).

Практический метод расчета. Строительные нормы и правила (СНиП) предусматривают для сжатых стержней проверку на устойчивость по условию. $\sigma = \frac{P}{A} \le R\varphi$, где φ — коэффициент продольного изгиба, зависящий от материала и от гибкости λ (см. табл. 10.1).

Таблица 10.1

Гибкость λ	Ст3	Ст5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	—	0,25
120	0,45	0,37	—	0,22
130	0,40	0,33	—	0,18
140	0,36	0,29	—	0,16
150	0,32	0,26	—	0,14
160	0,29	0,24	—	0,12
170	0,26	0,21	—	0,11
180	0,23	0,19	—	0,10
190	0,21	0,17	—	0,09
200	0,19	0,16	—	0,08

При расчете сжатых стержней на устойчивость решаются следующие задачи: 1) проверочный расчет; 2) подбор сечения; 3) определение несущей способности.

☝ Коэффициент $\varphi < 1$ всегда, поэтому его можно трактовать как коэффициент уменьшения расчетного сопротивления при продольном изгибе.

☝ Для подбора сечения сжатого стержня надо знать коэффициент φ, но он, в свою очередь, зависит от геометрических размеров стержня, в том числе и от формы и размеров сечения. Поэтому *задачу по подбору сечений* сжатых стержней решают *методом последовательных приближений*: принимают начальное значение φ, например $\varphi = 0{,}5$. Затем находят площадь по-

перечного сечения A, момент и радиус инерции, гибкость λ. На основании полученной гибкости по таблице определяют новое значение коэффициента φ и вычисляют напряжение, которое обычно значительно отличается от расчетного сопротивления.

Задача 45

Определить критическую и предельную (допускаемую) силу F (рис. 86), материал стойки CD — Ст3.

Решение. Вначале проведем расчет на устойчивость стальной стойки коробчатого сечения. Опорные закрепления стержня в двух главных плоскостях инерции считаются одинаковыми, поэтому стержень будет терять устойчивость в плоскости наименьшей жесткости.

Площадь всего сечения равна: $A = 4\times60\times1 = 240$ см^2.

Для осей z и y (а эти оси главные) вычисляем осевые моменты инерции сечения:

$$J_z = 2\cdot\frac{1\cdot60^3}{12} + 2\cdot\left(\frac{60\cdot1^3}{12} + 30{,}5^2\cdot60\right) = 147\,640 \text{ см}^4;$$

$$J_y = 2\cdot\frac{1\cdot60^3}{12} + 2\cdot\left(\frac{60\cdot1^3}{12} + 15^2\cdot60\right) = 63\,010 \text{ см}^4.$$

Для дальнейшего расчета принимаем *наименьшее* значение: $J_{\min} = J_y$.

Минимальный радиус инерции сечения

$$i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{63010}{240}} = 16{,}2 \text{ см};$$

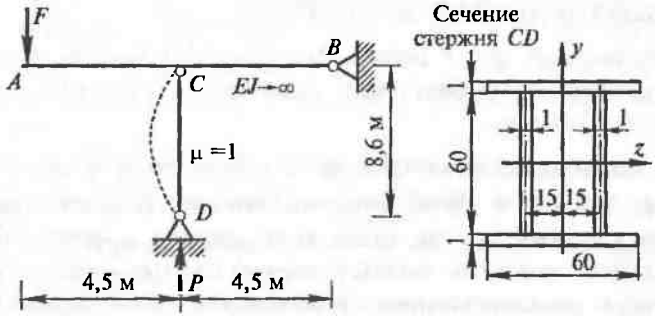


Рис. 86

гибкость стержня в плоскости наименьшей жесткости

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 860}{16{,}2} = 53{,}1.$$

Так как $\lambda' = 40 < \lambda = 53{,}1 < \lambda_{\min} = 100$ (стержень средней гибкости), то $\sigma_{кр} = a - b\lambda$ (прямая Ясинского): $\sigma_{кр} = 310 - 1{,}14 \cdot 53{,}1 = 249{,}5$ МПа.

Тогда *критическая сила* для данного стержня будет равна

$$P_{кр} = \sigma_{кр} A = 249{,}5 \cdot 10^6 \cdot 240 \cdot 10^{-4} = 5988 \text{ кН}.$$

Определим теперь *предельную* (допускаемую) силу для данного стержня. Сначала интерполированием (см. табл. 10.1) найдем коэффициент продольного изгиба φ, учитывая интервал:

$$\lambda = 50 \quad \varphi = 0{,}89;$$

$$\lambda = 60 \quad \varphi = 0{,}86.$$

$$\varphi_{(\lambda = 53{,}1)} = 0{,}89 - (0{,}89 - 0{,}86)/10 \times 3{,}1 = 0{,}881.$$

Тогда из условия $\frac{P}{A} < R\varphi$ получаем:

$$P_{пред} = AR\varphi = 240 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}881 = 4440 \text{ кН}.$$

Перейдем теперь от усилия P в стержне к внешней силе F, записав уравнение равновесия всей конструкции:

$$\sum M_B = 0; \; F \cdot 9 - P \cdot 4{,}5 = 0, \text{ откуда } F = P/2.$$

Тогда, окончательно, *предельная* (допускаемая) сила F будет равна

$$F_{пред} = P_{пред}/2 = 4440/2 = 2220 \text{ кН};$$

критическая сила

$$F_{кр} = P_{кр}/2 = 5988/2 = 2994 \text{ кН}.$$

* * *

☞ Если сечение составное или оси z и y не являются главными (см. рис. 87), то вначале нужно отыскать *минимальный* момент инерции всего сечения и определить плоскость наименьшей жесткости.

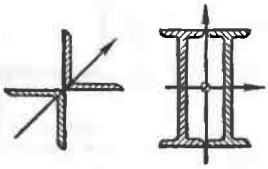


Рис. 87

☝ В строительных расчетах обычно применяют условие устойчивости, т. е. расчеты проводят с предельной (допускаемой) силой, а не с критической силой.

☝ В машиностроительных расчетах, как правило, пользуются критическими силами и напряжениями, а допускаемые определяют с помощью так называемого коэффициента запаса по устойчивости n_y, т. е. $P_{пред} = P_{кр}/n_y$.

☝ Сила, действующая на конструкцию, далеко не всегда (как в данном примере) является продольной силой, сжимающей стержень, который нужно рассчитывать на устойчивость. В статически определимой конструкции всегда можно записать необходимые уравнения статики и уже из них получить необходимые соотношения.

Задача 46

Подобрать размеры поперечного сечения стальной стойки AC (рис. 88).

Принять: $R = 210$ МПа; $F = 1200$ кН; $d/D = 0{,}8$.

Решение. Прежде всего, найдем усилие в интересующем нас стержне, составив уравнение равновесия всей конструкции:

$$\sum M_O = 0;\ F \cdot 5 - P \cdot 1 = 0,\ \text{откуда}\ P = 5F = 6000\ \text{кН}.$$

Из условия устойчивости $\frac{P}{A} < R\varphi$ получим $A > \frac{P}{R\varphi}$. Напомним, что задача в такой постановке не может быть решена «в

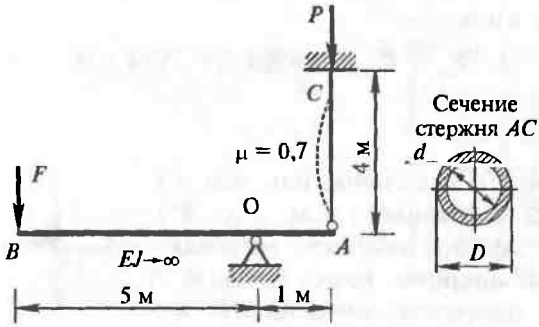


Рис. 88

одно действие», так как здесь неизвестны две величины: A и φ. Воспользуемся методом последовательных приближений.

1 приближение. Принимаем $\varphi = 0{,}5$.

Тогда $A \geq \dfrac{P}{R\varphi} = \dfrac{6 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}5} = 0{,}0571$ м^2 = 571 см^2.

Площадь трубчатого сечения $A = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 0{,}283D^2$.

Находим наружный диаметр $D = \sqrt{\dfrac{A}{0{,}283}} = \sqrt{\dfrac{571}{0{,}283}} = 44{,}9$ см.

Для сечения такого типа все оси — главные, а осевые моменты инерции сечения $J_z = J_y = J_{\min} = \dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = 0{,}0290D^4$, т. е. $J_{\min} = 118\,100$ см^4.

Вычисляем радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\dfrac{118100}{571}} =$ $= 14{,}4$ см и гибкость стержня AC: $\lambda - \mu l / i_{\min} = 0{,}7 \cdot 400/14{,}4 =$ $= 19{,}4$.

По линейной интерполяции (см. табл. 10.1) найдем коэффициент продольного изгиба φ:

$$\lambda = 10 \quad \varphi = 0{,}99;$$

$$\lambda = 20 \quad \varphi = 0{,}96.$$

$$\varphi_{(\lambda = 19{,}4)} = 0{,}99 - (0{,}99 - 0{,}96)/10 \cdot 9{,}4 = 0{,}962.$$

Полученное значение φ существенно отличается от начального, поэтому принимаем для следующего приближения среднее значение

$$\varphi = (0{,}5 + 0{,}962)/2 = 0{,}731.$$

2 приближение. Итак, $\varphi = 0{,}731$.

Тогда $A > \dfrac{P}{R\varphi} = \dfrac{6 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}731} = 391$ см^2,

откуда $D = \sqrt{\dfrac{A}{0{,}283}} = \sqrt{\dfrac{391}{0{,}283}} = 37{,}2$ см.

Осевой момент инерции сечения $J_{\min} = 0{,}0290D^4 = 55\,360$ см^4.

Радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{55360}{391}} = 11{,}9$ см;

гибкость стержня AC: $\lambda = 0{,}7 \cdot 400/11{,}9 = 23{,}5$.

По интерполяции найдем коэффициент продольного изгиба φ, учитывая, что

$$\lambda = 20 \quad \varphi = 0{,}96;$$

$$\lambda = 30 \quad \varphi = 0{,}94.$$

$$\varphi_{(\lambda = 23{,}5)} = 0{,}96 - (0{,}96 - 0{,}94)/10 \cdot 3{,}5 = 0{,}953.$$

Полученное значение коэффициента φ также отличается от начального, поэтому принимаем для следующего приближения среднее значение

$$\varphi = (0{,}731 + 0{,}953)/2 = 0{,}842.$$

3 приближение. Итак, $\varphi = 0{,}842$.

Тогда $A > \dfrac{P}{R\varphi} = \dfrac{6 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}842} = 339$ см^2,

откуда $D = \sqrt{\dfrac{A}{0{,}283}} = \sqrt{\dfrac{339}{0{,}283}} = 34{,}6$ см.

Осевой момент инерции сечения

$$J_{\min} = 0{,}0290 \cdot 34{,}6^4 = 41\,600 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{41600}{339}} = 11{,}1$ см;

гибкость стержня AC: $\lambda = 0{,}7 \cdot 400/11{,}1 = 25{,}2$.

По интерполяции найдем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{(\lambda = 25{,}2)} = 0{,}96 - (0{,}96 - 0{,}94)/10 \cdot 5{,}2 = 0{,}950.$$

Полученное значение φ также еще отличается от начального, поэтому принимаем для следующего приближения среднее значение

$$\varphi = (0{,}842 + 0{,}950)/2 = 0{,}896.$$

4 приближение. Итак, $\varphi = 0{,}896$.

Тогда $A \geq \dfrac{P}{R\varphi} = \dfrac{6 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^6 \cdot 0{,}896} = 319$ см^2,

откуда $D = \sqrt{\dfrac{A}{0{,}283}} = \sqrt{\dfrac{319}{0{,}283}} = 33{,}6$ см.

Осевой момент инерции сечения $J_{\min} = 0{,}0290 D^4 = 36\,800$ см^4.

Радиус инерции сечения $i_{\min} = \sqrt{\dfrac{36800}{319}} = 10{,}7$ см;

гибкость стержня AC: $\lambda = 0{,}7 \cdot 400/10{,}7 = 26{,}2$.

Коэффициент продольного изгиба $\varphi_{(\lambda = 26,2)} = 0,948$.

Полученное значение φ также еще отличается от начального, поэтому принимаем в качестве нового для следующего приближения среднее значение

$$\varphi = (0,896 + 0,948)/2 = 0,922.$$

5 приближение. Итак, $\varphi = 0,922$.

Тогда $A \geq \frac{P}{R\varphi} = \frac{6 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^6 \cdot 0,922} = 310$ см^2,

откуда $D = \sqrt{\frac{A}{0,283}} = \sqrt{\frac{310}{0,283}} = 33,1$ см.

Осевой момент инерции сечения $J_{min} = 0,0290 D^4 = 34\,800$ см^4.

Радиус инерции сечения $i_{min} = \sqrt{\frac{34800}{310}} = 10,6$ см;

гибкость стержня *AC*: $\lambda = 0,7 \cdot 400/10,6 = 26,4$.

Коэффициент продольного изгиба $\varphi_{(\lambda = 26,4)} = 0,947$.

Проверим условие устойчивости:

$$\frac{6 \cdot 10^6}{310 \cdot 10^{-4}} < 210 \cdot 10^6 \cdot 0,947 \text{ или, окончательно, } 194 < 199 \text{ МПа.}$$

Расхождение составляет $\frac{199 - 194}{194} \cdot 100\% = 2,6\%$, что вполне приемлемо.

Таким образом, искомые размеры трубчатого сечения таковы:

внешний диаметр $D = 33,1$ см;

внутренний диаметр $d = 0,8D = 26,5$ см.

* * *

☝ Считают сечение подобранным удовлетворительно, если σ и $R\varphi$ отличаются не более чем на 5 %.

☝ Если в сечение, размеры которого надо определить, входит *прокатный профиль*, то сходимость обычно имеет место лишь при первых итерациях. Затем, ввиду дискретности сортаментного набора, наступает этап скачкообразных изменений, поэтому на заключительной стадии подбора сечения необходимо осуществить проверку устойчивости для некоторых ближайших прокатных профилей. В этом случае недогрузка может оказаться и более 5 %.

11 ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

Общие замечания. При постепенном, медленном приложении нагрузки к элементам конструкции в них не возникает ускорений — в таких случаях принято говорить, что нагрузка *статическая*. Если же при силовом воздействии точки конструкции имеют значительные ускорения, а следовательно, появляются силы инерции, то эти нагрузки называют *динамическими*.

Общий подход к расчету элементов сооружений на динамическую нагрузку основан на использовании известного из теоретической механики принципа Даламбера.

Силы инерции в ряде случаев могут быть определены непосредственно. Например, при равноускоренном линейном перемещении, при вращении деталей машин и т. д. В других случаях, в частности при ударе, для определения динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

Силы инерции зависят и от массы сооружения, испытывающего динамическое воздействие, и от массы нагружающего тела (например, массы поезда и т. п.).

При расчете влияние динамической нагрузки обычно учитывается с помощью так называемого динамического коэффициента. Для получения максимального значения усилия, напряжения, деформации, перемещения и т. п. динамическая нагрузка заменяется статической, а найденные от нее напряжение, перемещение, деформация *умножаются на динамический коэффициент* $k_д$.

Естественно, динамический коэффициент $k_д$ зависит и от вида динамической нагрузки, и от размеров, массы, жесткости сооружения, и от ряда других факторов.

В курсе сопротивления материалов рассматриваются только самые простые случаи динамических воздействий (случаи заданных ускорений, колебаний, удара) и решаются несложные задачи.

11.1 УЧЕТ ПОСТОЯННЫХ СИЛ ИНЕРЦИИ

На основании *принципа Даламбера* движущуюся систему (или точку) можно в любой момент времени рассматривать как находящуюся *в равновесии*, если к действующим на систему (или точку) заданным силам и динамическим реакциям связей присоединить силы инерции. Сила инерции материальной точки равна произведению ее массы на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению.

Задача 47

Бетонная балка поднимается краном с ускорением $a = 6$ м/с^2. Определить максимальные напряжения в балке, если ее поперечное сечение — квадрат со сторонами $b = 20$ см, удельный вес бетона $\gamma = 24$ кН/м^3 (рис. 89).

Найти также напряжения в стальных канатах, площадь поперечного сечения которых $A = 1$ см^2, $\alpha = 45°$, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 4$ м.

Решение.

Объем балки — $V = b^2 l = 0{,}2^2 \cdot 6 = 0{,}24$ м^3;

вес балки — $G = \gamma \cdot V = 24 \cdot 0{,}24 = 5{,}76$ кН.

Динамическая нагрузка

$$P_д = \left(1 + \frac{a}{g}\right) G = 1{,}6 \cdot 5{,}76 = 9{,}22 \text{ кН}.$$

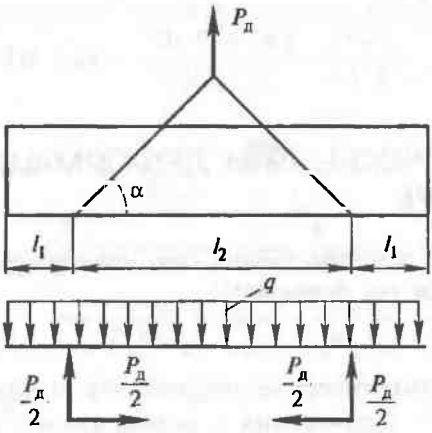


Рис. 89

Погонная динамическая нагрузка на балку

$$q = G/l = 9{,}22/6 = 1{,}54 \text{ кН/м}.$$

Нагрузка, действующая на балку, показана на рисунке 89.

Изгибающие моменты: в сечении прикрепления троса

$$M_1 = -q\frac{l_1^2}{2} = -1{,}54\cdot\frac{1^2}{2} = -0{,}77 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в сечении посередине балки

$$M_2 = -q\frac{\left(l_1 + \frac{l_2}{2}\right)^2}{2} + \frac{P_д}{2}\cdot\frac{l_2}{2} - \frac{P_д}{2}\cdot\frac{b}{2} =$$

$$= -1{,}54\cdot\frac{3^2}{2} + 4{,}61\cdot 2 - 4{,}61\cdot 0{,}1 = 1{,}83 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Максимальные (сжимающие) напряжения в балке

$$|\sigma_{max}| = \sigma_и + \sigma_c = \frac{M_2}{W} + \frac{P_д}{2A} = \frac{1{,}83\cdot 10^{-3}}{1{,}33\cdot 10^{-3}} + \frac{9{,}2\cdot 10^{-3}}{2\cdot 0{,}04} = 1{,}49 \text{ МПа}.$$

Здесь $W = \frac{b^3}{6} = \frac{0{,}2^3}{6} = 0{,}00133$ м^3, $A = b^2 = 0{,}04$ м^2.

Продольная сила в канате $N_д = \frac{\sqrt{2}}{2}P_д$, напряжения (растягивающие) в канате

$$\sigma_k = \frac{\sqrt{2}P_д}{2\cdot 2A} = \frac{1{,}41\cdot 9{,}22\cdot 10^{-3}}{2\cdot 2\cdot 1\cdot 10^{-4}} = 32{,}5 \text{ МПа}.$$

11.2 НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ УДАРЕ

Напряжения и перемещения при ударном действии нагрузки определяются по формулам:

$$\sigma_д = k_д\sigma_{ст},\ \delta_д = k_д\delta_{ст},$$

где $\sigma_д$ и $\delta_д$ — динамические напряжения и перемещения при ударе; $\sigma_{ст}$ и $\delta_{ст}$ — напряжения и перемещения, вызванные статическим действием силы, равной весу падающего груза.

Динамический коэффициент при ударе без учета массы конструкции, подвергающейся удару, определяется по формуле

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}},$$

где H — высота падения ударяющего груза.

Обратите внимание: $\delta_{ст}$ в формуле для определения $k_д$ — это всегда перемещение точки, подвергающейся удару, а $\delta_{ст}$ в формуле для определения $\delta_д$ — перемещение той точки, где требуется найти $\delta_д$. Это могут быть разные точки.

Задача 48

На составную балочную конструкцию падает груз с высоты H (рис. 90). Определить динамический коэффициент.

Принять: $H = 4$ см; $P = mg = 6$ кН; модули упругости деревянной и стальной балок $E_д = 1 \cdot 10^4$ МПа; $E_с = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент податливости пружины $\alpha = 0{,}6$ см/кН.

Решение. Для вычисления динамического коэффициента $k_д$ нужно статически приложить силу P в точке ее соударения с балкой и определить перемещение этой точки — это и будет $\delta_{ст}$. В нашем примере следует найти перемещение точки C.

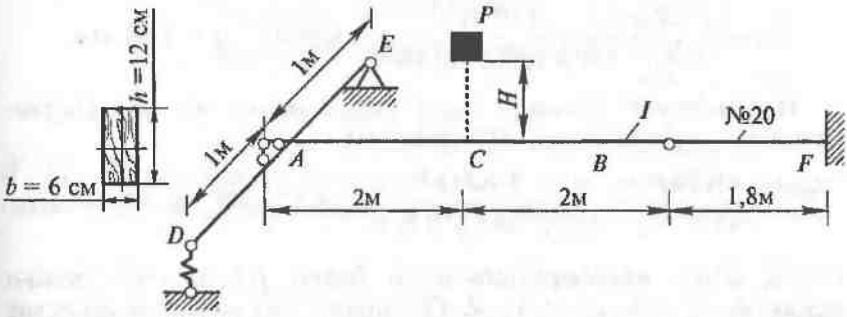


Рис. 90

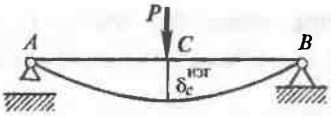


Рис. 91

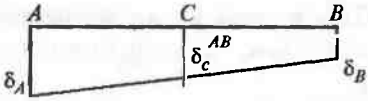


Рис. 92

Прежде всего следует выяснить: из каких составляющих будет складываться это перемещение? Здесь оно состоит:

а) из прогиба в точке C балки AB как балки на двух неподвижных опорах при изгибе (рис. 91);

б) из смещения точки C недеформированной балки AB в связи с перемещением (осадкой) точек A и B за счет деформаций частей DE и BF.

Таким образом, $\delta_{ст} = \delta_C = \delta_C^{изг} + \delta_C^{AB}$.

Очевидно, что $\delta_C^{изг} = \dfrac{Pl_{AB}^3}{48EJ_{AB}}$ (см. рис. 64). Здесь в знаменателе стоят жесткостные характеристики стального двутавра №20. Тогда

$$\delta_C^{изг} = \frac{6\cdot 10^3 \cdot 4^3}{48\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 1840\cdot 10^{-8}} = 2{,}17\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 2{,}17\ \text{мм}.$$

Смещение точки C недеформированной балки AB можно определить чисто геометрически (рис. 92):

$$\delta_C^{AB} = \frac{\delta_A + \delta_B}{2}.$$

Из рисунка 93 видно, что точка B опустится на столько, на сколько прогнется от силы $P/2$ двутавровая балка BF (табличная формула):

$$\delta_B = \frac{(P/2)l_{BF}^3}{3EJ_{BF}} = \frac{3\cdot 10^3 \cdot 1{,}8^3}{3\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 1840\cdot 10^{-8}} = 1{,}59\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 1{,}59\ \text{мм}.$$

Перемещение точки A будет складываться из двух составляющих: прогиба балки DE (рис. 94)

$$\delta_A^{изг} = \frac{(P/2)l_{LE}^3}{48E_д J_{DE}} = \frac{3\cdot 10^3 \cdot 2^3}{48\cdot 10^{10}(6\cdot 12^3/12)\cdot 10^{-3}} = 5{,}79\cdot 10^{-3}\ \text{м} = 5{,}79\ \text{мм}$$

и опускания недеформированной балки DE за счет осадки пружины $\delta_A^{DE} = \delta_D/2 = \alpha N_D/2$. Очевидно, что усилие в пружине будет равно опорной реакции в точке D, а именно $P/4$; тогда

Рис. 93

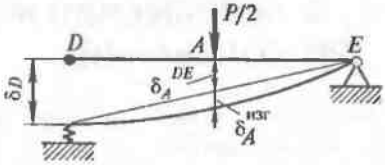


Рис. 94

$$\delta_A = \delta_A^{изг} + \delta_A^{DE} = 5{,}79 \cdot 10^{-3} + 0{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}5/2 =$$
$$= (5{,}79 + 4{,}50) \cdot 10^{-3} \text{ м} = 10{,}29 \text{ мм}.$$

Возвращаясь к точке C, имеем

$$\delta_{ст} = \delta_C = \delta_C^{изг} + \delta_C^{AB} = 2{,}17 + (10{,}29 + 1{,}59)/2 = 8{,}11 \text{ мм}.$$

Динамический коэффициент будет равен

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0{,}811}} = 4{,}30.$$

Наибольшие *нормальные напряжения* будут возникать в сечениях C (стальная балка) и A (деревянная). Соответствующие статические изгибающие моменты равны:

$$M_C = Pl_{AB}/4 = 6 \cdot 4/4 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_A = (P/2)l_{DE}/4 = 3 \cdot 2/4 = 1{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Статические напряжения:

$$\sigma_{ст}^C = M_C/W_{AB} = 6000/184 \cdot 10^{-6} = 32{,}6 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{ст}^A = M_A/W_{DE} = 1500/(0{,}06 \cdot 0{,}12^2/6) = 10{,}4 \text{ МПа}.$$

Динамические напряжения:

$$\sigma_д^C = k_д \sigma_{ст}^C = 4{,}3 \cdot 32{,}6 = 140{,}4 \text{ МПа};$$
$$\sigma_д^A = k_д \sigma_{ст}^A = 4{,}3 \cdot 10{,}4 = 44{,}7 \text{ МПа}.$$

* * *

☝ Если конструкция составная (как в этом примере), то динамический коэффициент $k_д$ ЕДИН для всей конструкции.

11.3 НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ

Колебания возникают при действии на систему периодической возмущающей нагрузки и сопровождаются появлением сил инерции, с которыми связаны дополнительные напряжения и деформации. Эти дополнительные напряжения могут быть весьма значительными и должны учитываться в расчетах.

Уравнения движения для выбранной расчетной схемы сооружения составляются на основе методов, рассматриваемых в теоретической механике. Так, для вывода уравнений движения упругих систем используются квазистатические способы, основанные на применении принципа Даламбера. В этом случае рассматривается равновесие системы с приложенными к ней силами инерции.

В сопротивлении материалов обычно рассматриваются уравнения движения системы лишь с одной степенью свободы, включающие в общем случае четыре воздействия — силу инерции, силу сопротивления, силу упругости и возмущающую силу.

Амплитудное значение напряжений, вызванных действием возмущающей силы, определяется по формуле: $\sigma_д = k_д \sigma_{ст}$, где $k_д$ — динамический коэффициент; $\sigma_{ст}$ — напряжение при статическом действии силы. При расчете на прочность необходимо учитывать также постоянные во времени напряжения, вызванные в системе весом приложенных к ней грузов.

Динамический коэффициент при колебательном движении системы с одной степенью свободы определяется по формуле

$$k_д = 1 + \frac{P_0}{G}\beta,$$

где P_0 — возмущающая сила; G — вес колеблющегося груза; β — коэффициент нарастания колебаний.

В простейших случаях, когда не учитывается сопротивление среды, коэффициент нарастания колебаний β определяется по формуле

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right|}.$$

Здесь θ — частота вынужденных колебаний ($\theta = \pi n/30$; n — число изменений возмущающей силы в 1 мин); ω — частота

свободных колебаний, определяемая, в свою очередь, по формуле

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}},$$

где g — ускорение свободного падения ($g \approx 9{,}81$ м/с^2); $\Delta_{ст}$ — статический прогиб сечения балки (где находится масса) от действия сосредоточенной силы G.

Как видно, расчет сводится к СТАТИЧЕСКОМУ определению *перемещений* (расчету на жесткость) и *напряжений* (расчету на прочность).

Очевидно, что если ω приближается к θ, то амплитуда колебаний быстро растет; при $\omega = \theta$ возникает резонанс и прогиб балки стремится к бесконечности. Обычно считают, что «отключение» от резонанса будет обеспечено, если θ отличается от ω на +30 %. Поскольку частота вынужденных колебаний, как правило, задана, следует рассчитывать систему так, чтобы частота ее собственных колебаний удовлетворяла условию $\omega > 1{,}3\theta$. В некоторых случаях допускают $\omega < 0{,}7\theta$.

Задача 49

Электродвигатель массой $m = 1500$ кг, установленный на конце консоли из двутавров №20 ($J_z = 1840$ см^4; $W_z = 184$ см^3) длиной $l = 1$ м, имеет частоту вращения ротора $n = 820$ об/мин (рис. 95). Неуравновешенная масса ротора вызывает центробежную силу $P_0 = 2$ кН.

Проверить систему на резонанс, а также прочность и жесткость балки, если расчетное сопротивление $R = 210$ МПа, допускаемый прогиб $[f] = (1/400)l$. Массой балки пренебречь.

Решение. Находим статический прогиб на конце балки (табличная формула):

$$\Delta_{ст} = \frac{Gl^3}{3EJ_z} = \frac{15\cdot10^3\cdot1^3}{3\cdot2\cdot10^{11}\cdot2\cdot1840\cdot10^{-8}} = 0{,}679\cdot10^{-3}\text{ м},$$

здесь $G = mg = 15$ кН — вес двигателя.

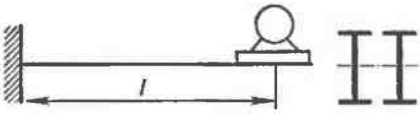


Рис. 95

Определяем круговую частоту свободных (собственных) колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}=\sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}679\cdot10^{-3}}}=120\ с^{-1}.$$

Частота возмущающей силы (число циклов за 2π секунд)

$$\theta=\pi n/30=3{,}14\cdot820/30=85{,}8\ с^{-1},$$

при этом относительная разница частот $\frac{120-85{,}8}{85{,}8}\cdot100\ \%=40\ \%$, что более 30 %, поэтому резонанс не опасен.

Статическое напряжение (в крайних волокнах сечения в заделке) равно

$$\sigma_{ст}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{15\cdot10^3\cdot1}{2\cdot184\cdot10^{-6}}=40{,}8\ МПа.$$

Коэффициент нарастания колебаний $\beta=\frac{1}{\left|1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right|}=\frac{1}{\left|1-\frac{85{,}8^2}{120^2}\right|}=2{,}05$,

тогда динамический коэффициент $k_д=1+\frac{P_0}{G}\beta=1+\frac{2}{15}\cdot2{,}05=1{,}27$.

Найдем наибольшие напряжение и перемещение от вибрационной нагрузки:

$$\sigma_д=k_д\sigma_{ст}=1{,}27\cdot40{,}8=51{,}8\ МПа;$$

$$\Delta_д=k_д\Delta_{ст}=1{,}27\cdot0{,}679\cdot10^{-3}=0{,}862\cdot10^{-3}\ м.$$

Очевидно, что прочность и жесткость обеспечены, так как $\sigma_д<R$ и $\Delta_д<[f]=2{,}5\cdot10^{-3}$ м.

СОДЕРЖАНИЕ

Перечень основных обозначений единиц и их наиболее употребляемые единицы 3

1 Общие рекомендации 6
2 Осевое растяжение—сжатие 8

2.1 Эпюры, напряжения, перемещения 8
2.2 Учет собственного веса 14
2.3 Статически неопределимые системы 18

3 Геометрические характеристики сечений 33
4 Напряженное состояние в точке 43
5 Кручение 46
6 Изгиб 52

6.1 Построение эпюр 52
6.2 Три типа задач: прямая, проектная, эксплуатационная . . . 66
6.3 Напряженно-деформированное состояние 71
6.4 Составная балка 75

7 Определение перемещений балок 79
8 Статически неопределимые балки 94
9 Сложное сопротивление 103

9.1 Косой изгиб 104
9.2 Растяжение (сжатие) с изгибом — внецентренное растяжение (сжатие) 108
9.3 Изгиб с кручением 115

10 Устойчивость сжатых стержней 117
11 Динамическое действие нагрузок 126

11.1 Учет постоянных сил инерции 127
11.2 Напряжения и деформации при ударе 128
11.3 Напряжения и деформации при колебаниях 132